

التمرين الأول: [10 نقاط]

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x - 2$$

- [01 ن] ① ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها
- [0.5 ن] ② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $0.4 < \alpha < 0.5$
- [0.5 ن] ③ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x-3}{1+e^{-x}}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$

- [1.5 ن] ① احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

②

أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

ب/ استنتج تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

③

أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) ④ أثبت أن $f(\alpha) = a - 2$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

⑤

أ/ أوجد نقط تقاطع (C_f) مع حامي محوري الاحداثياتب/ مثل بيانيا كلا من (Δ) و (C_f) ⑥ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x) = m$$

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x \ln x - x - 1$$

- [01 ن] ① ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها
- [0.5 ن] ② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0; +\infty[$ حيث: $3.5 < \alpha < 3.6$
- [0.5 ن] ③ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

- [01 ن] ① احسب نهايات الدالة f ، ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا
- ②

[02 ن] أ/ بيّن أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

[01 ن] ب/ استنتج تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

[01 ن] ③ اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

[01 ن] ④ مثّل بيانيا كلا من (T) و (C_f) ، (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.7$)

(III) لتكن الدالة h المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{x}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

- [01 ن] ① تحقق أن $h(x) + 1 = f(x - 1)$
- [01 ن] ② استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة تحويل نقطي يطلب تعيينه

✓ | إنتهى

اعلم أن مسافة الألف ميل تبدأ بخطوة

وتذكّر أن الوقت المتبقي لموعد بكالوريا 2022 هو:

199 يوم فقط



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0 \text{ لأن } (C_f)$$

• يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته: $y = 0$

2

$$f'(x) = \frac{g(x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \text{ / أ تبين أنه}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + e^{-x} - (-e^{-x})(x-3)}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{1 + e^{-x} + xe^{-x} - 3e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{1 + e^{-x} + xe^{-x} - 3e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{1 - 2e^{-x} + xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x - 2 + x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{g(x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f :

لدينا: $e^{-x} > 0$ و $(1+e^{-x})^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ومنه:

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		0	$+\infty$

3

أ/ تبين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_{(\Delta)}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-3}{1+e^{-x}} - x+3 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-3-x-xe^{-x}+3+3e^{-x}}{1+e^{-x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-xe^{-x}+3e^{-x}}{1+e^{-x}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Rightarrow \frac{-xe^{-x} + 3e^{-x}}{1+e^{-x}} = 0 \\ &\Rightarrow -xe^{-x} + 3e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

حل التمرين الأول:

I

1 دراسة تغيرات الدالة g :

• النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

• دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = e^x + 1 > 0$$

• جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g(0.5) \times g(0.4) < 0$ لأن: $g(0.5) \approx 0.1$ و $g(0.4) \approx -0.1$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0.4; 0.5]$ 3 استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II

1

$$f(x) = \frac{e^x(x-3)}{1+e^x} \text{ / أ تبين أنه}$$

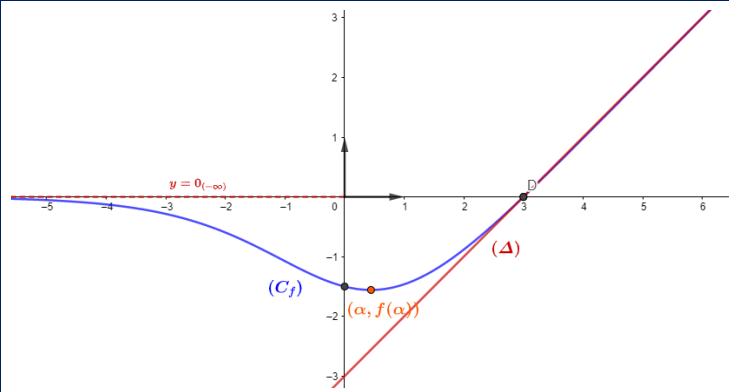
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-3}{1+e^{-x}} \\ &= \frac{e^{-x}(xe^x - 3e^x)}{e^{-x}(e^x + 1)} \\ &= \frac{xe^x - 3e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x(x-3)}{e^x + 1} \end{aligned}$$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ج/ تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x(x-3)}{e^x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^x - 3e^x}{e^x + 1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$



6 المناقشة البيانية لعدد إشارة حلول المعادلة $f(x) = m$:

لما $m < f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب تماما

لما $f(\alpha) < m < f(0)$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماما

لما $m = f(0)$ المعادلة تقبل حل معدوم وحل موجب تماما

لما $f(0) < m < 0$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

لما $m \geq 0$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما

$$\Rightarrow e^{-x}(3-x) = 0$$

لدينا: $e^{-x} \neq 0$

ومنه: $3-x = 0$

إذن: $x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

• $x \in]-\infty; 3[$ لما (Δ) فوق (C_f)

• $x = 3$ لما (Δ) يقطع (C_f)

• $x \in]3; +\infty[$ لما (Δ) تحت (C_f)

4 اثبات أن $f(\alpha) = a - 2$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha} - 2 + \alpha = 0$$

$$\Rightarrow e^{\alpha} = 2 - \alpha$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{e^{\alpha}(\alpha - 3)}{e^{\alpha} + 1} \\ &= \frac{(2 - \alpha)(\alpha - 3)}{2 - \alpha + 1} \\ &= \frac{(2 - \alpha)(\alpha - 3)}{-(\alpha - 3)} \\ &= -(2 - \alpha) \\ &= \alpha - 2 \end{aligned}$$

- استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا:

$$0.4 < \alpha < 0.5$$

ومنه:

$$-1.6 < \alpha - 2 < -1.5$$

إذن:

$$-1.6 < f(\alpha) < -1.5$$

5

أ/ إيجاد نقط تقاطع (C_f) مع حامي محوري الاحداثيات:

- مع حامل محور الفواصل:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x-3}{1+e^{-x}} = 0 \\ &\Rightarrow x-3 = 0 \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{3\}$

- مع حامل محور الترتيب:

$$f(0) = \frac{0-3}{1+e^{-0}} = -\frac{3}{2}$$

إذن: $(C_f) \cap (yy') = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

ب/ التمثيل البياني لكلا من (Δ) و (C_f) :

حل التمرين الثاني:

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\ln x - 1 - \frac{1}{x} \right) \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{x \ln x}_0 - x - 1 \right] = -1$$

- المشتقة:

$$g'(x) = \ln x + \frac{1}{x} x - 1 = \ln x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1		$+\infty$

2 تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة مستمرة ورتيبة على المجال $]3.5; 3.6[$

ولدينا: $g(3.5) \times g(3.6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا α في المجال $]3.5; 3.6[$

3 استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1 حساب نهايات الدالة f :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 1$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معدلته $y = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معدلته $x = 0$

2

أ/ تبين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x+1-x \ln x}{x} \\ &= -\frac{(x+1)^2}{x} \\ &= -\frac{x+1-x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-x-1+x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f :

لدينا: $x(x+1)^2 > 0$ على المجال $]0; +\infty[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

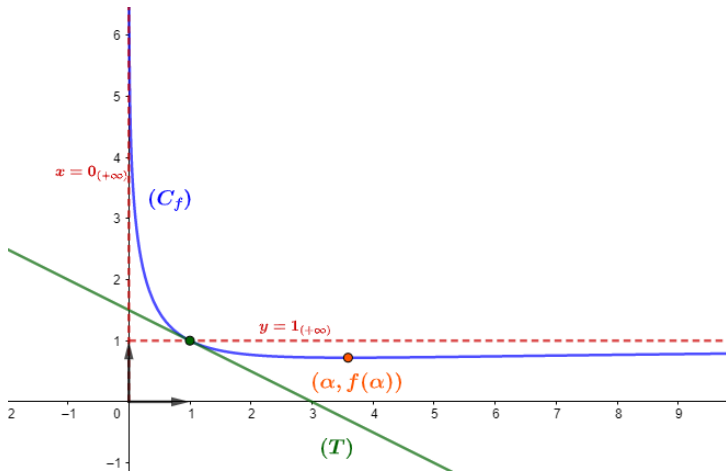
- جدول التغيرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0		1

3 اكتب معادلة المماس (T) :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(1)(x-1) + f(1) = -\frac{1}{2}(x-1) + 1 \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

4 التمثيل البياني:



(III)

1 التحقق أن $h(x) + 1 = f(x-1)$:

$$h(x) + 1 = 1 - \frac{\ln(x-1)}{x} = f(x-1)$$

2 استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) :

لدينا: $h(x) + 1 = f(x-1)$

ومنه: $h(x) = f(x-1) - 1$

إذن: (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$