ثانوية ابن عليوي صالح
2021/2020

المستوي : 3 ت ر
المدة : ساعتين

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول (7 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0 = \frac{1}{5}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n+1}$

1/ بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < \frac{1}{2}$

2/ ا) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$ استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ب) بين ان المتتالية (U_n) متقاربة

3/ (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{3U_n}{1-2U_n}$

ا) اثبت ان المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول

ب) اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم بين ان $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$، احسب $\lim U_n$

4/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \ldots + \frac{1}{U_n}$

التمرين الثاني (13 نقاط)

ا g الدالة معرفة على $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x - (x-1)ln(x-1)$

1/ احسب $\lim_{x\to 1} g(x)$ وبين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

3/ ا) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α على $]1 ; +\infty[$ ، ثم تحقق ان $\alpha \in [e^2+1 ; e^3+1]$

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

|| f الدالة المعرفة على $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{ln(x^2-1)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1/ احسب $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، وبين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2/ ا) بين أنه من اجل كل x من $]1 ; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ب) بين ان f متزايدة تماما على المجال $]1 ; \sqrt{\alpha}]$ و ومتناقصة تماما على المجال $[\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f

3/ بين أن $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4/ يبن ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها β حيث $1,4 < \beta < 1,5$

5/ ارسم (C_f) (نأخذ $\sqrt{\alpha} \backsimeq 3$)

6/ m وسيط حقيقي ، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلين متمايزين

7/ h دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = f(e^x)$

ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

تصحيح اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات للسنة الثالثة ثانوي

التمرين الأول (7 نقاط)

$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$; $u_0 = \frac{1}{5}$

1) البرهان بالتراجع على أن $0 < u_n < \frac{1}{2}$:

$n=0$ من أجل $0 < u_0 < \frac{1}{2}$ صحيحة، $P(0)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

لدينا $0 < u_n < \frac{1}{2}$ إذن $1 < 2u_n + 1 < 2$ ومنه $0 < \frac{1}{2u_n+1} < \frac{1}{2}$

$0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ ومنه $-1 < -\frac{1}{2u_n+1} < -\frac{1}{2}$

$0 < u_n < \frac{1}{2}$: n من أجل كل عدد طبيعي

ومنه $P(n+1)$ صحيحة

2) $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{2u_n+1} - u_n = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n+1}$

$= \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

$1 - 2u_n > 0$ لأن $0 < 1 - 2u_n < 1$ ومنه $0 < u_n < \frac{1}{2}$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه $u_n > 0$،

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3) $v_n = \frac{3u_n}{1-2u_n}$

أ) $v_{n+1} = \frac{3u_{n+1}}{1-2u_{n+1}} = \frac{6u_n}{1-2u_n} = 2v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $v_0 = 1$

ب) $v_n = 2^n$ بدلالة n

$u_n = \frac{v_n}{2v_n+3}$ ، ومنه $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n\left[2+\frac{3}{2^n}\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{2^n}} = \frac{1}{2}$

التمرين الثاني (13 نقطة)

الجزء الأول

$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$; $D =]1;+\infty[$

1) $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)\left[\frac{2x}{x-1} - \frac{\ln(x-1)}{x-1}\right] = -\infty$

$g'(x) = 2 - \ln(x-1) - \frac{x-1}{x-1} = 1 - \ln(x-1)$

$1 - \ln(x-1) \geq 0$ تعني $x - 1 \leq e$ تعني $x \leq e+1$

جدول إشارة g' على $]1;+\infty[$:

x	1		$e+1$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	↗	$e+2$	↘	$-\infty$

$g(e+1) = 2(e+1) - e\ln e = e+2$

$g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]1;+\infty[$ لأن g مستمرة ورتيبة تماما على $[e+1;+\infty[$ و $g(e+1) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) < 0$

$g(e^2+1) \times g(e^3+1) < 0$ لدينا $g(e+1) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) < 0$

$e^2+1 < \alpha < e^3+1$ ومنه $\alpha \in [e^2+1;\ e^3+1]$

$g(e^3+1) = 2 - e^3$ و $g(e^2+1) = 2 - e^2$

$g(\alpha) = 0$ حيث

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

2) $D =]1;+\infty[$; $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$

$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1} \cdot x - \ln(x^2-1)}{x^2}$

$f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x^2)$ على $]1;+\infty[$

$g(x^2) = 0$ تعني $x^2 = \alpha$ تعني $x = \sqrt{\alpha}$

جدول إشارة f' على $]1;+\infty[$:

x	1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$g(x^2)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\sqrt{\alpha})$	↘	0

$f(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$ لدينا

$2\alpha - (\alpha-1)\ln(\alpha-1) = 0$ لأن $g(\alpha) = 0$

ومنه $\ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$

$f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

أ) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $e+1$:

$y = f'(e+1)(x-(e+1)) + f(e+1)$

$y = \frac{1}{e+1}x - 1 + \frac{\ln e}{e+1}$

$y = \frac{1}{e+1}x - \frac{e}{e+1}$

ب) $f(x) - \left(\frac{1}{e+1}x - \frac{e}{e+1}\right) = \frac{\ln(x-1)}{x} - \frac{x-e}{(e+1)x}$

$= \frac{(e+1)\ln(x-1) - x + e}{(e+1)x}$

$= \frac{g(x)}{(e+1)x}$

جدول إشارة الفرق على $]1;+\infty[$:

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x) - y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (T)		(C_f) تحت (T)	

ج) $f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

$f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

3) $h(x) = f(e^x)$ على $]0;+\infty[$

أ) $h'(x) = e^x \times f'(e^x)$

$e^x > 0$ لأن $e^x > 1$ تعني $x > 0$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(e^x)$ على $]0;+\infty[$

$f'(e^x) = 0$ تعني $e^x = \sqrt{\alpha}$ أي $x = \ln\sqrt{\alpha}$

جدول إشارة h' على $]0;+\infty[$:

x	0		$\ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$h(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	↘	0

$h(\ln\sqrt{\alpha}) = f(e^{\ln\sqrt{\alpha}}) = f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

ب) $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} f(e^x) \quad (e^x = X)$

$= \lim_{X\to 1} f(X) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f(e^x) \quad (e^x = X)$

$= \lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$

4) $\alpha \in [e^2+1;\ e^3+1]$ ومنه $\sqrt{\alpha} \in [\sqrt{e^2+1};\ \sqrt{e^3+1}]$

$\sqrt{e^2+1} < \sqrt{\alpha} < \sqrt{e^3+1}$

$2 < \sqrt{\alpha} < 5$

$f(2) = \frac{3}{4} = 0{,}75$ و $f(5) = \frac{\ln 24}{5} \approx 0{,}64$

$f(\sqrt{\alpha}) = f(m)$ تقبل حلين $\sqrt{\alpha}$ و m حيث $m \in]\beta;\sqrt{\alpha}[\cup]\sqrt{\alpha};+\infty[$

$x = 1$ معادلة المستقيم المقارب لـ (C_f)

$f(1{,}5) = 0{,}14$ و $f(1{,}4) = -0{,}029$

$f(1{,}4) \times f(1{,}5) < 0$

$f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في $]1;+\infty[$ حيث $1{,}4 < \beta < 1{,}5$

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $M(\beta;0)$ حيث $\beta \in [1{,}4;\ 1{,}5]$