

اختبار

الفصل الأول

تمرين 1 (4نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وأربع كريات سوداء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 2 ، 3 وخمس كريات خضراء تحمل الأرقام 4 ، 4 ، 5 ، 5 ، 5. (لا نفرق بينها عند اللمس)
نسحب من هذا الكيس كرتين في آن واحد بطريقة عشوائية.
(1) A و B حادثتان حيث: A: "سحب كرتين إحداهما سوداء تحمل الرقم 2 والثانية لونها مختلف"، و B: "سحب كرتين تحملان رقمين مجموعهما أكبر تماما من 3". بيّن أن $P(A) = \frac{4}{11}$ و $P(B) = \frac{19}{22}$ ، ثم استنتج حساب $P(A \cup B)$.
(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الرقم الأكبر بين رقمي الكرتين المسحوبتين، والرقم 6 إذا كانت الكرتان تحملان نفس الرقم.

(أ) عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم بيّن أن: $P(X = 4) = \frac{7}{33}$ و $P(X = 6) = \frac{1}{6}$.

(ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

(3) نجري الآن n سحبة متتالية لكعبة بحيث نعيد في كل مرة الكعبة المسحوبة إلى الكيس.

(أ) عبّر بدلالة العدد الطبيعي n الاحتمال P_n للحصول على الكريات البيضاء فقط، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث يكون $P_n \geq 0,002$.

(ب) احسب احتمال سحب كعبة واحدة فقط بيضاء.

تمرين 2 (4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} - 4$.

(1) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-3 \leq u_n < -2$.

(ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 2)(u_n + 4)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n + 4}$. استنتج اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

(2) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} + 2 \geq (2 - \sqrt{2})(u_n + 2)$.

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 > u_n + 2 \geq -(2 - \sqrt{2})^n$. ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول v_0 ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n + 4}{2}\right)$.

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q = \frac{1}{4}$ ، يطلب كتابة حدّها العام بدلالة n .

(ب) نضع $P_n = (u_0 + 4) \times (u_1 + 4) \times \dots \times (u_n + 4)$. بيّن أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $P_n = 2^{2^{-n} + n - 1}$.

تمرين 3 (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. M نقطة لاحقها العدد المركب z ، حيث $z = x + iy$ ،

x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب z حيث $z \neq -i$ العدد المركب $Z = \frac{iz + 5}{z + i}$.

(1) بين أن الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z = \frac{6x}{x^2 + (y+1)^2} + i \frac{x^2 + y^2 - 4y - 5}{x^2 + (y+1)^2}$.

(2) عيّن وأنشئ المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

(3) عيّن وأنشئ المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا، مع ذكر العناصر المميّزة لـ E_2 .

(4) عيّن وأنشئ المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون طويلة $Z + i$ تساوي 2 بمعنى $|Z + i| = 2$.

(5) عيّن وأنشئ المجموعة E_4 للنقط M من المستوي بحيث يتحقق $Z = \bar{Z}$.

تمرين 4 (7 نقاط)

I- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; +\infty[$ بـ: $g(x) = x(x - 2 - e^{-x})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) بين أن: $g'(x) = (x-1)(e^{-x} + 2)$ ، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين، أحدهما معدوم والآخر α حيث $2, 1 < \alpha < 2, 2$. استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = x + \frac{e^{-x} + 1}{x - 1}$.

ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

ج) بين أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

(2) أ) بين أن: من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) ليكن (T) المماس للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة β . بين أن المماس (T) يشمل النقطة A حيث $A(1, 0)$.

إذا تحقق: $(\beta + 1)(e^{-\beta} + 1) = 0$. استنتج أن معادلة المماس (T) هي: $y = \frac{3+e}{4}(x-1)$.

(3) أ) بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $f(-2)$ ، ثم ارسم المستقيم المقارب (Δ) ، المماس (T) والمنحني $(\mathcal{C})$.

(4) m وسيط حقيقي، ولتكن f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f_m(x) = x + \frac{e^{-x} + m}{x - 1}$ و $(\mathcal{C}_m)$ تمثيلها البياني.

أ) p و q عددين حقيقيين موجبين تماما حيث $p < q$. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_p)$ و $(\mathcal{C}_q)$.

ب) عيّن قيمة العدد الحقيقي m حتى تكون الدالة f_m هي حل للمعادلة التفاضلية: $(x-1)y' + x(y-1) = x^2$.

تصحيح اختبار الفصل الأول 2021

عبد المطلب

تمرين 1:

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_8^1}{C_{12}^2} = \frac{4}{11} \quad (1)$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_2^1 C_4^1 + C_2^2}{C_{12}^2} = 1 - \frac{3}{22} = \frac{19}{22}$$

$$P(B) = \frac{C_{10}^2 + C_2^1 C_4^1}{C_{12}^2} \quad \text{أو} \quad X = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad (2)$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{7}{33}$$

$$P(X=6) = \frac{C_2^2 + C_4^2 + C_2^1 C_3^1}{66} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \frac{C_3^1 \times C_2^1}{66} = \frac{21}{22}$$

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 2 \times \frac{4}{33} + \frac{3}{11} + 4 \times \frac{7}{33} + 5 \times \frac{9}{22} + \frac{6}{6} = \frac{97}{22} = 4,409$$

$$P_n = \frac{3^n}{12^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (3)$$

$$4^n \leq 500 \quad \text{أي} \quad \frac{1}{4^n} \geq 0,002 \quad \text{يعني} \quad P_n \geq 0,002$$

$$n \leq 4,48 \quad , \quad n \leq \frac{\ln 500}{\ln 4} \quad , \quad \ln 4^n \leq \ln 500$$

$$n=4 \quad \text{و من هنا}$$

$$P = n \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{n}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (ب)$$

$$P = n \left(\frac{1 \times 3^{n-1}}{4^n}\right) = n \left(\frac{3^{n-1}}{4^n}\right)$$

تمرين 2:

$$(1) \quad n=0 \quad : \quad U_0 = -3 \quad \text{و من هنا} \quad -3 < U_0 < -2 \quad (تقريباً)$$

$$\text{نفرض أن} \quad -3 < U_n < -2 \quad \text{و نبرهن صحة} \quad -3 < U_{n+1} < -2$$

$$\text{لدينا} \quad -3 < U_n < -2 \quad \text{و} \quad -6 < 2U_n < -4$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2U_n+8} < 2 \quad ; \quad 2 \leq 2U_n+8 < 4$$

$$-3 \leq \sqrt{2} - 4 \quad \text{و} \quad \sqrt{2} - 4 \leq \sqrt{2U_n+8} - 4 < -2$$

$$\text{و من هنا} \quad -3 < U_{n+1} < -2 \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad -3 < U_n < -2$$

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n+8} - 4 - U_n = \frac{(\sqrt{2U_n+8}-4)(\sqrt{2U_n+8}+4+U_n)}{\sqrt{2U_n+8}+4+U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n+8-(4+U_n)^2}{\sqrt{2U_n+8}+4+U_n} = \frac{2(U_n+4)-(U_n+4)^2}{\sqrt{2U_n+8}+4+U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n+2)(U_n+4)}{\sqrt{2U_n+8}+4+U_n} > 0$$

$$\text{أي} \quad -3 < U_n < -2 \quad \text{و} \quad -1 < U_{n+1} < 2 \quad (\text{موجب})$$

$$\text{و} \quad -1 < U_n+2 < 0 \quad (\text{سالب})$$

$$\text{لذا} \quad (U_n) \text{ متزايدة تماماً}$$

U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$$(2) \quad \text{لدينا} \quad U_{n+1}+2 = \frac{(\sqrt{2U_n+8}-2)(\sqrt{2U_n+8}+2)}{\sqrt{2U_n+8}+2} = \frac{2U_n+8-2}{\sqrt{2U_n+8}+2}$$

$$U_{n+1}+2 = \frac{2(U_n+2)}{\sqrt{2U_n+8}+2}$$

$$\text{لذا} \quad U_{n+1}+2 > (2-\sqrt{2})(U_n+2) \quad \text{نكافئ}$$

$$\frac{2(U_n+2)}{\sqrt{2U_n+8}+2} > (2-\sqrt{2})(U_n+2) \quad (U_n+2 < 0)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2U_n+8}+2} < 2-\sqrt{2} \quad \text{أي}$$

$$\text{لدينا} \quad \sqrt{2} \leq \sqrt{2U_n+8} < 2 \quad \text{و من هنا}$$

$$2+\sqrt{2} \leq \sqrt{2U_n+8}+2 < 4 \quad \text{وعند استعمال المتكافئ}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{\sqrt{2U_n+8}+2} \leq \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

$$\text{لدينا} \quad \frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2-\sqrt{2}$$

$$\text{و من هنا} \quad \frac{2}{\sqrt{2U_n+8}+2} < 2-\sqrt{2} \quad \text{أي} \quad U_{n+1}+2 > (2-\sqrt{2})(U_n+2)$$

$$(ب) \quad n=0 \quad : \quad U_0+2 > -(2-\sqrt{2})^0 \quad \text{أي} \quad -1 > -1$$

$$\text{نفرض أن} \quad U_n+2 > -(2-\sqrt{2})^n$$

$$\text{و نبرهن صحة} \quad U_{n+1}+2 > -(2-\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\text{لدينا} \quad (2-\sqrt{2}) \times [U_n+2 > -(2-\sqrt{2})^n]$$

$$0 > (2-\sqrt{2})(U_n+2) > -(2-\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\text{و من هنا} \quad U_{n+1}+2 > (2-\sqrt{2})(U_n+2)$$

$$\text{و من هنا} \quad 0 > U_{n+1}+2 > -(2-\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\text{لذا} \quad 0 > U_n+2 > -(2-\sqrt{2})^n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{لدينا} \quad 1 < 2-\sqrt{2} < 1 \quad \text{و من هنا} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (2-\sqrt{2})^n = 0$$

$$\text{باستعمال مبرهنة كاسر} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n+2) = 0$$

$$\text{و من هنا} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -2$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{U_{n+1}+4}{2} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{\sqrt{2U_n+8}}{2} \right) \quad (3)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2 \times 2^n} \ln \left(\frac{2U_n+8}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{U_n+4}{2} \right) = \frac{1}{4} V_n$$

$$\text{و من هنا} \quad (V_n) \text{ متناهيته كسرية أسية} \quad V_0 = -\ln 2 \quad \text{و} \quad \frac{1}{4}$$

$$V_n = V_0 q^n = -\ln 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$\text{أي} \quad \ln \left(\frac{U_n+4}{2} \right) = 2^n V_n \quad \text{و} \quad (U_n+4) = 2 e^{2^n V_n}$$

$$(U_n+4) = 2 e^{2^n \left(\frac{-\ln 2}{4^n} \right)} = 2 \left(e^{-\ln 2} \right)^{\frac{1}{2^n}} = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^n}}$$

$$P_n = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^0}} \times 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^1}} \times \dots \times 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^n}} = 2^{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-e^{-(x-1)} - e^{-1}}{(x-1)^2} \quad (P2)$$