

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 3 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \frac{nu_n + 2}{n+1}$.

1- احسب الحدود: u_2, u_3 و u_4 .2- (أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n < 2$.(ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما، واستنتج أنّها متقاربة.3- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = n(a - u_n)$ ، حيث $a \in \mathbb{R} - \{2\}$.(أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها $(a - 2)$ ، يطلب تعيين حدّها الأول v_1 .(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n و a ، استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.(ج) احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.4- ليكن المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$. بيّن أنّ $S'_n = n(n-1)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كريات بيضاء تحمل الرقم 1 وأربع كريات سوداء تحمل الرقم a ، حيث a عدد طبيعي أكبر تماما من 1. نسحب ثلاث كريات في آن واحد بطريقة عشوائية.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة.1- عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم بيّن أنّ الأمل الرياضي $E(X) = \frac{9+6a}{5}$.2- عيّن قيمة للمتغير العشوائي X بحيث $[E(X)]^2 = 9E(X)$.

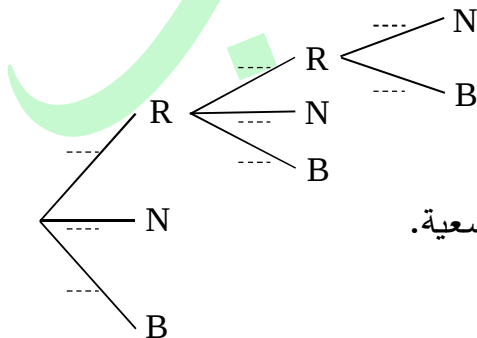
3- نضيف إلى الكيس السابق كرتين حمراوين، ثم نسحب منه كرية واحدة. إذا كانت بيضاء نربح، وإذا كانت سوداء نخسر، أما إذا كانت حمراء فنسحب كرة أخرى من الكيس دون إرجاع الكرة الحمراء وهكذا...

نسمي الحادثة B: سحب كرة بيضاء.

نسمي الحادثة N: سحب كرة سوداء.

نسمي الحادثة R: سحب كرة حمراء.

(أ) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تتمزج هذه الوضعية.

(ب) احسب الاحتمال p_1 للربح واستنتج الاحتمال p_2 للخسارة.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I - 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 - 4z + 8 = 0$.

2- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة التالية: $\begin{cases} 2z_1 + \bar{z}_2 = 6 \\ \bar{z}_1 + z_2 = 3 + i \end{cases}$.

II - المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط A, B, C و D من هذا

المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 2i, z_B = 3 + i, z_C = 2 - 2i$ و $z_D = \bar{z}_C$.

1- بين أن $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{i(\frac{\pi}{2})}$. استنتج طبيعة المثلث ABC ، ثم مثله.

2- بين أن $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4})}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S يطلب تعيين خصائصه.

3- بين أن العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول كل نقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ هي: $z' = (1 - i)z - 2$.

4- بين أن: من أجل كل عدد مركب z ، $z' - z = -i(z - 2i)$ ، استنتج طبيعة المثلث AMM' .

5- بين أن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $OM' = OM$ هي دائرة $(\mathcal{C})$ ، مركزها D وتشمل A .

6- لتكن النقطة I منتصف القطعة $[CD]$. بين أن المجموعة (E) للنقط M من هذا المستوي التي تحقق:

$\|\vec{MC} + \vec{MD}\| = 2\|\vec{MI} - \vec{MA}\|$ هي صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ بالتشابه المباشر S . مثل $(\mathcal{C})$ والمجموعة (E) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x) = (x^2 - 2x)(\ln x - 2) + x & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$)

1- أ) احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

ب) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين؟ فسّر النتيجة بيانياً.

2- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ فإن $f'(x) = (x - 1)(2 \ln x - 3)$. استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- أ) (Δ) مستقيم معادلته $y = x$. بين أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقطع المستقيم (Δ) عند ثلاث نقاط يطلب تعيينها.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4- أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $3,1 < \alpha < 3,2$ و $5,5 < \beta < 5,6$.

ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathcal{C})$.

ج) عيّن بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلين متميزين.

5- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x^2 - 2|x|)(2 - \ln|x|) - |x|$ لما $x \neq 0$ و $g(0) = 0$.

أ) بين أن الدالة g زوجية، ثم تأكد أنه من أجل كل من المجال $[0; +\infty[$ فإن: $g(x) = -f(x)$.

ب) اشرح كيفية رسم البيان $(\mathcal{C}')$ الممثل للدالة g ثم ارسم البيان $(\mathcal{C}'')$.

انتهى الموضوع الأول

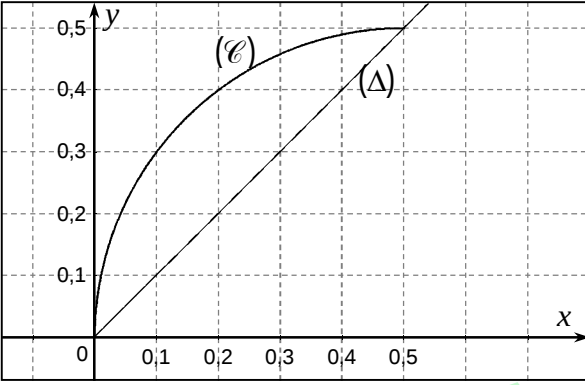
الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ ، والمنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f المعرفة على المجال $[0; 0,5]$ بـ: $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$. في الشكل أسفله التمثيل لكل من المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathcal{C})$.

1- بيّن أنّ الدالة f متزايدة على المجال $[0; 0,5]$.

2- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0,1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.



(أ) مثل على حامل محور الفواصل في الوثيقة المرفقة، الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حسابها، مبرزاً خطوط الرسم.

(ب) أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3- (أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 0,5$.

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

4- (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{2}{2u_n + 3}$ ، بيّن أنّ (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقطة A من هذا المستوي لاحتقتها $z_A = 3 + 3i$ ، ولتكن النقطة B صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

1- (أ) بيّن أنّ $\frac{z_B}{z_A} = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث AOB .

(ب) مثل النقطة A واستنتج تمثيل النقطة B . (حساب z_B غير مطلوب)

2- (أ) اكتب على الشكل الأسّي العددين المركبين z_A و z_B .

(ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب z_B ، واستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

(ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = -1$.

3- (أ) بيّن أنّ لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل $roror$ هي $z_C = -z_A$.

(ب) بيّن أنّ النقط A, B و C تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين عناصرها المميزة.

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC . أنشئ الدائرة $(\mathcal{C})$ والمثلث ABC .

4- عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي التي تحقّق $\arg\left(\frac{z + z_C}{z - z_C}\right)^2 = \pi + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

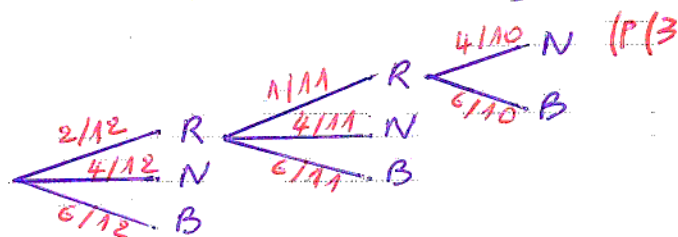
- زهرة نرد حمراء مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6. زهرة نرد خضراء مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 0، 0، 1، 1، 2، 2. نرمي النردين في آن واحد ونسجل الرقمين الظاهرين. جميع الأوجه لها نفس حظوظ الظهور.
- 1- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية مجموع الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين. عيّن قانون الاحتمال للمتغير X ، ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$.
- 2- نضع هذين النردين في كيس ونسحب منه عشوائيا نردا واحدا ثم نرميه مرتين متتاليتين. نسمي الحوادث التالية: الحادثة A: النرد المسحوب أحمر. الحادثة B: النرد المسحوب أخضر. الحادثة C: الرقمين الظاهرين زوجيين. أنشئ شجرة الاحتمالات التي تتمزج هذه الوضعية، ثم احسب الاحتمالات التالية: $P(A \cap C)$ ، $P(C)$ و $P_C(A)$. (في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ بـ: $g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$.
- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ، وبين أنّ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (ضع $t = -\frac{1}{x}$).
- 2- أثبت أنّ: من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}^*$ ، $g'(x) = \left(\frac{-2x+1}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g .
- 3- بين أنّ المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا $-1,4 < a < -1,5$. استنتج أنّ $g(x) - 1 \geq 0$ لما $a \leq x < 0$.
- II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ بـ: $f(x) = -x + 1 + e^{-\frac{1}{x}}$.
- ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، فسّر بيانيا النتيجة الأخيرة.
- 2- بين أنّ $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = -x + 2$. بين أنّ $(\mathcal{C})$ يقع أعلى (Δ) لما $x < 0$.
- 3- أ) أثبت أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = g(x) - 1$. استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات f .
ب) بين أنّ المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.
- 4- أ) بين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا b حيث $1,5 < b < 1,6$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.
ب) بين أنّ $f(a) = a^2 - a + 1$ واستنتج حصرا للعدد $f(a)$.
- ج) ارسم (Δ) ، $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ الممثل للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = f(-x)$. نأخذ $f(a) \approx 4,4$.
- 5- (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 + e^{-\frac{1}{u_n}}$.
- أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $b < u_n \leq 2$.
- ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) . استنتج أنّها متقاربة ثم احسب نهايتها.

انتهى الموضوع الثاني

$a=6$: ومعه $\frac{9+6a}{5} = 9$



$P_1 = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} \times \frac{6}{11} + \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$ (ب)

$P_2 = 1 - P_1 = \frac{2}{5} = 0,4$

تمرين 3:

$z^2 - 4z + 8 = 0$ (1 - I)

$\Delta = -16 = 16i^2 = (4i)^2$

(مترافقين) $z_2 = 2 + 2i$, $z_1 = 2 - 2i$

$\begin{cases} 2\bar{z}_1 + z_2 = 6 \\ \bar{z}_1 + z_2 = 3 + i \end{cases}$ نكافئ $\begin{cases} 2\bar{z}_1 + z_2 = 6 \\ \bar{z}_1 + z_2 = 3 + i \end{cases}$ (2)

$z_1 = 3 + i$: ومعه $z_1 = 3 - i$: ومعه

$z_2 = 2i$: ومعه $z_2 = 6 - 2\bar{z}_1$

$\frac{z_c - z_b}{z_a - z_b} = \frac{-1-3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (1 - II)

$\frac{|z_c - z_b|}{|z_a - z_b|} = \frac{BC}{BA} = 1$, $\arg\left(\frac{z_c - z_b}{z_a - z_b}\right) = (\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\pi}{2}$
ومعه المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

$\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = \frac{2-4i}{3-i} = 1-i = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{4})}$ (2)

$z_c - z_a = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{4})} (z_b - z_a)$

ولدينا $z' - w = re^{i\theta}(z - w)$

ومعه : C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

$z' = az + b$ حيث : b هو لا مركزي A
 $\frac{b}{1-a} = z_A$ و $a = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = 1-i$

$z' = (1-i)z - 2$: ومعه $b = -2$ أي

$z' = z - iz - 2$ أي $z' = (1-i)z - 2$ (4)

$(z' - z) = -i(z - 2i)$: ومعه $z' - z = -iz - 2$

$\frac{z' - z}{z - 2i} = \frac{z' - z}{z - z_A} = -i = e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

$\frac{|z' - z|}{|z - z_A|} = \frac{MM'}{AM} = 1$, $\arg\left(\frac{z' - z}{z - z_A}\right) = (\vec{AM}, \vec{MM'}) = -\frac{\pi}{2}$
ومعه المثلث AMM' مثلث قائم ومتساوي الساقين

$|z'| = |z|$ نكافئ $OM' = OM$ (5)

$|(1-i)z - 2| = |z|$

$|(1-i)(x+iy) - 2| = |x+iy|$

$|(x+y-2) + i(-x+y)| = |x+iy|$

$\sqrt{(x+y-2)^2 + (y-x)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

تصحيح البكالوريا التجريبي 2020

تصحيح 1:

$u_4 = \frac{3}{2}$ و $u_3 = \frac{2u_2 + 2}{3} = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{u_1 + 2}{2} = 1$ (1)

$(4 \leq 20) u_1 < 2$ ومعه $u_1 = 0$, $n=0$: $u_n < 2$ (P12)

نفرض أن $u_n < 2$ ونبرهن $u_{n+1} < 2$: لدينا $u_n < 2$:
 $\frac{n u_n + 2}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1}$, $n u_n + 2 < 2n+2$, $n u_n < 2n$

$u_{n+1} < 2$, $n \in \mathbb{N}$ من أجل كل $u_n < 2$

$u_{n+1} - u_n = \frac{n u_n + 2}{n+1} - u_n = \frac{n u_n + 2 - n u_n - u_n}{n+1} = \frac{2 - u_n}{n+1}$ (ب)

لدينا : $2 - u_n > 0$, $-u_n > -2$, $u_n < 2$ ومعه :
 $u_{n+1} - u_n > 0$, $u_{n+1} > u_n$ متزايدة

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$v_{n+1} = (n+1)(a - u_{n+1}) = (n+1)(a - \frac{n u_n + 2}{n+1})$ (P3)

$v_{n+1} = (n+1)(\frac{an + a - n u_n - 2}{n+1}) = an + a - n u_n - 2$

$v_{n+1} - v_n = an + a - n u_n - 2 - (na + a - n u_n) = a - 2$

ومعه : $v_n = a$ و $r = a - 2$ متناحية حسابية

$v_n = v_1 + (n-1)r = a + (n-1)(a-2) = (a-2)n + 2$ (ب)

$u_n = a - \frac{v_n}{n}$ ومعه $v_n = n(a - u_n)$

$u_n = a - \frac{(a-2)n + 2}{n} = 2 - \frac{2}{n}$ (الحد العام)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \frac{2}{n}) = 2$

$S_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(a + (a-2)n + 2) = \frac{n}{2}[(a-2)n + a + 2]$ (7)

$u_n = 2 - \frac{2}{n}$: لدينا (4)

$S_n^+ = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + n u_n$

$S_n^+ = (2 - \frac{2}{1}) + 2(2 - \frac{2}{2}) + 3(2 - \frac{2}{3}) + \dots + n(2 - \frac{2}{n})$

$S_n^+ = (2-2) + (2 \times 2 - 2) + (3 \times 2 - 2) + \dots + (2n - 2)$

$S_n^+ = 2(1+2+3+\dots+n) - 2-2-2+\dots-2$

$S_n^+ = 2 \frac{n(n+1)}{2} - 2n = n^2 + n - 2n = n^2 - n$

يصلح حساب مجموع متناحية حسابية حد ما العام $n u_n$

تمرين 2:

$X = \{3i2+a; 1+2a; 3a\}$ (1)

$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

$P(X=2+a) = \frac{C_6^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$

$P(X=1+2a) = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$

$P(X=3a) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$

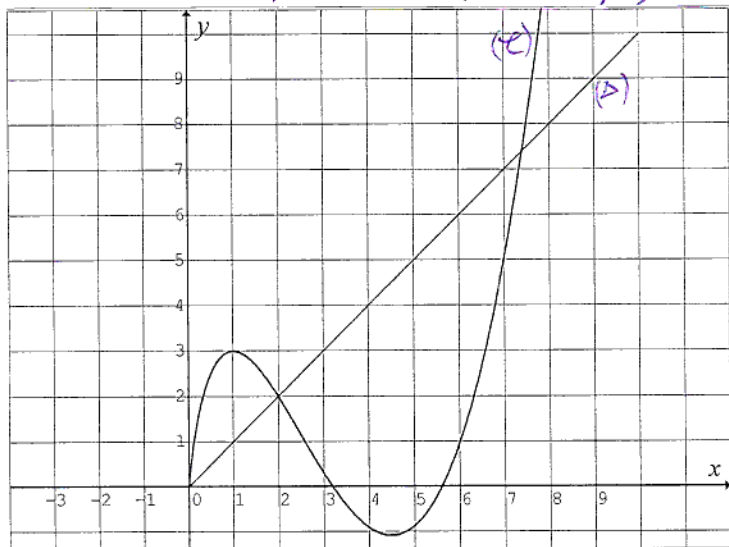
$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} + (2+a)(\frac{1}{2}) + (1+2a)(\frac{3}{10}) + 3a \times \frac{1}{30}$

$E(X) = \frac{6a+9}{5}$

$E(X)[E(X)-9] = 0$: أي $[E(X)]^2 - 9E(X) = 0$ (2)

$E(X) = 9$ أو $E(X) = 0$ (مستحيل)

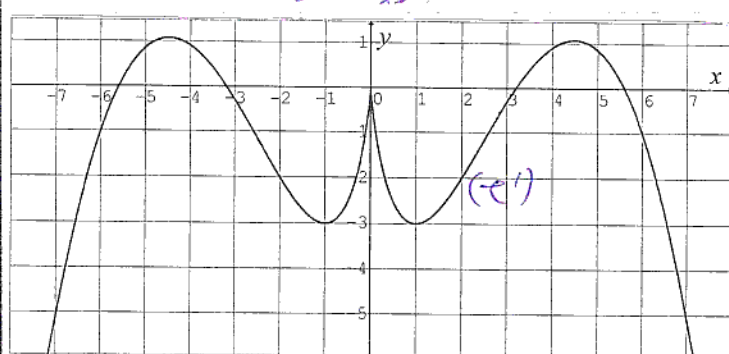
f مستمرة ومتزايدة على المجال $]5,5; 5,6[$
 $f(5,5) \approx -0,184 < 0$ و $f(5,6) \approx 0,011 > 0$
 ومنه حسب القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$
 تقبل حلا وحيدا β حيث $5,5 < \beta < 5,6$
ب) رسم المنحنى (ع) واطلاق قيم (د).



$f(x) = f(m)$ تقبل حلين متمايزين
 لد: $f(e^{3/2}) < f(m) < 0$ ومنه: $\alpha < m < \beta$
 $m \neq e^{3/2}$

(P 5)
 $g(x) = (x^2 - 2x - 1)(x - \ln x) - 1 - x$
 $g(-x) = (x^2 - 2|x|)(x - \ln|x|) - 1 - x = g(x)$
 ومنه g زوجية
 $g(x) = (x^2 - 2x)(2 - \ln x) - x$ ومنه $|x| = x, x \geq 0$
 $g(x) = -[(x^2 - 2x)(\ln x - 2) + x] = -f(x)$

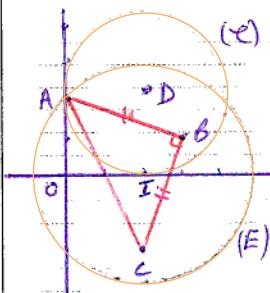
ب) ما $g(x) = f(x)$: $x \geq 0$ ومنه (e') يتأخر (د) بالنسبة لمحور الفواصل وما $x < 0$ بما أن g زوجية، فإن (e') يقبل كمحور تناظرا حامل محور التناظر



تلمة: باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن:
 $\int_1^{e^2} (x^2 - 2x)(\ln x - 2) dx = \frac{9e^4 - 2e^2 - 31}{18}$
 المساحة A للغير المستوي المنحدر (ع) والقيم (د)
 $x = e^2$ و $x = 1, y = x$

نضع: $\begin{cases} u(x) = \ln x - 2 \\ v'(x) = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 \end{cases}$
 $\int_1^{e^2} (x^2 - 2x)(\ln x - 2) dx = \left[(\ln x - 2) \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \frac{1}{x} dx$
 $= \left[(\ln x - 2) \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{3} - x \right) dx$
 $= \left[(\ln x - 2) \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) - \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} \right) \right]_1^{e^2} = \frac{9e^4 - 2e^2 - 31}{18}$
 $A = \int_1^{e^2} (x - f(x)) dx = - \int_1^{e^2} (x^2 - 2x)(\ln x - 2) dx = \frac{19e^4}{18}$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ دائرة مركزها $D(2,2)$ ونصف قطرها $r = DA = 2$
 أي نصف قطرها $r = DA = 2$
(6) $z_I = \frac{z_1 + z_2}{2} = 2$
 صورة D بالتحويل S :
 $z' = (1-i)z_0 - 2 = 2 = z_I$
 وبما أن A صاعدة، منه صورة الدائرة (ع) هي الدائرة التي مركزها I وتحتل A أي نصف قطرها $IA = \sqrt{2} AD = 2\sqrt{2}$
 $\| \vec{MI} + \vec{MD} \| = 2 \| \vec{MI} - \vec{MA} \|$
 $\| \vec{MI} + \vec{IC} + \vec{MI} + \vec{ID} \| = 2 \| \vec{MI} + \vec{MA} \|$
 $\| 2\vec{MI} + \vec{IC} + \vec{ID} \| = 2 \| \vec{AI} \|$
(MI = AI)
 هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r = AI = 2\sqrt{2}$



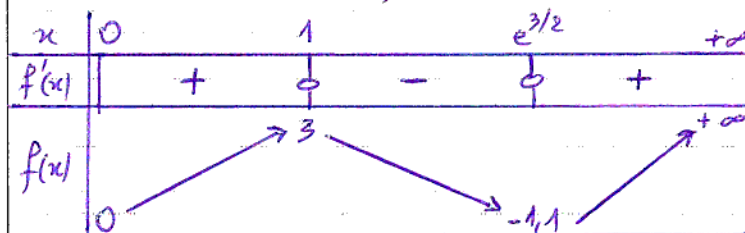
تمرين 4:

(P 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(x-2)(\ln x - 2) + x] = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2)(\ln x - 2) + x}{x} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

ومنه f غير قابلة للشتقاق عند 0 من اليمين.
(ع) يقبل نصف مماس عمودي (يوازي y')

(P 2)
 $f'(x) = (2x-2)(\ln x - 2) + \frac{1}{x}(x^2 - 2x) + 1$
 $f'(x) = 2(x-1)(\ln x - 2) + (x-1) = (x-1)(2\ln x - 3)$
 $f'(x) = 0$ ما $x = 1$ أو $\ln x = \frac{3}{2}$ أي $x = e^{3/2}$
 0 1 $e^{3/2}$ $+\infty$
 + - + -

ب) f متناقصة $1 \leq x \leq e^{3/2}$
 f متزايدة $x \in]0, 1[\cup]e^{3/2}, +\infty[$



(P 3) $x(x-2)(\ln x - 2) = 0$ يعني $f(x) = x$
 $C(e^2, e^2)$ و $B(2, 2)$ و $A(0, 0)$

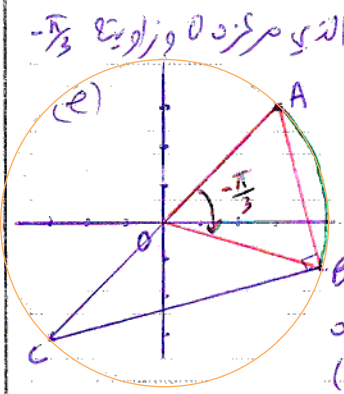
ب) لدراسة وضعية (ع) بالنسبة لـ (د)، ندرس إشارة $f(x) - x$

x	0	2	e^2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+	+
$\ln x - 2$	-	-	0	+
$f(x) - x$	-	+	-	+

(ع) أي $x \in]0, 2[\cup]e^2, +\infty[$
(د) أي $x \in]2, e^2[$
(ع) يقطع (د) عند A, B, C المذكورة سابقا.

(P 4) f مستمرة ومتناقصة على المظا $]3, 1; 3, e[$
 $f(3,1) \approx 0,138 > 0$ و $f(3,e) \approx 0,014 < 0$
 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$
 تقبل حلا وحيدا α حيث $3,1 < \alpha < 3, e$

$\frac{|z_B|}{|z_A|} = \frac{OB}{OA} = 1$ و $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = (\vec{OA}, \vec{OB}) = -\frac{\pi}{3}$
ومنه المثلث ABO متساوي الساقين



(2) $z_A = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
 $z_B = e^{i(-\frac{\pi}{3})} \times z_A$
 $= e^{i(-\frac{\pi}{3})} \times 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
ومنه $z_B = 3\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{12})}$

أو: $\arg(z_B) = (\vec{OA}, \vec{OB}) = -\frac{\pi}{3}$
 $(\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{OC}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$
 $|z_B| = OB = OA$

(1) $z_B = (3+3i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3+3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3-3\sqrt{3}}{2}$
 $z_B = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2 \times 3\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
 $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{3-3\sqrt{3}}{2 \times 3\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

ومنه $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(3) $-1 = e^{i\pi}$ و $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

$(k \in \mathbb{N})$ $n = 3 + 6k$: ومنه $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$

ror: $z' = e^{i(-\frac{\pi}{3})} \times e^{i(\frac{\pi}{3})} z = e^{i(-\frac{\pi}{3})} z$ (P3)
roror: $z' = e^{i(2\pi/3)} \times e^{i(\frac{\pi}{3})} z = e^{i(\pi)} z$

ومنه $z_C = e^{i\pi} z_A = -z_A$
 $r = 3\sqrt{2}$ و O دائرة مركزها O و $OA = OB = OC$ (1)

(2) بما أن C نظيرة A بالنسبة لـ O فإن $[AC]$ هو قطر الدائرة الماثل المثلث ABC قائم في B .

(4) $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) = \pi + 2k\pi$ ومنه $z_C = -z_A$

$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) = \pi + 2k\pi$

$(\vec{CM}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(3) هي دائرة قطرها $[AC]$ ماعدا A و C .

	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

$E(X) = \frac{9}{2} = 4,5$

$V(X) = \frac{143}{6} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{43}{12}$

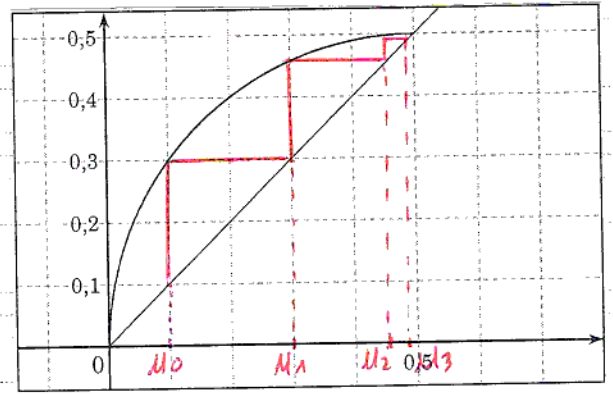
تمرين 3:

(1) قيم المتغير العشوائي X
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

تمحيص البكالوريا التجريبي 2020

تمرين 1:

(1) $f(x) = \sqrt{-x^2+x}$ ومنه $f'(x) = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}}$
لأن $0 \leq x \leq 0,5$: $-1 \leq -2x \leq 0$: $0 \leq -2x+1 \leq 1$
لذا f متزايدة على $[0, 0,5]$



(2) (M_n) متزايدة لأن $0 \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq M_3$ ومتقاربة نحو 0,5.

(3) $0 \leq M_n \leq 0,5$: $n=0$: $M_0 = 0,2$
نظن أن $0 \leq M_n \leq 0,5$ ونبرهن $0 \leq M_{n+1} \leq 0,5$
لدينا $0 \leq M_n \leq 0,5$ و بما أن f متزايدة على $[0, 0,5]$
 $f(0) \leq f(M_n) \leq f(0,5)$
ومنه $0 \leq M_{n+1} \leq 0,5$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

(4) $M_{n+1} - M_n = \frac{\sqrt{-M_n^2+M_n} - M_n}{\sqrt{-M_n^2+M_n} + M_n}$
 $0 \leq M_n \leq 0,5$: $M_{n+1} - M_n = \frac{M_n(-2M_n+1)}{\sqrt{-M_n^2+M_n} + M_n} \geq 0$
ومنه (M_n) متزايدة

(5) (M_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى على $[0, 0,5]$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = l$ ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{n+1} = l$
بالتربيع: $2l^2 - l = 0$: $l = 0$ أو $l = \frac{1}{2}$
لأنها متزايدة

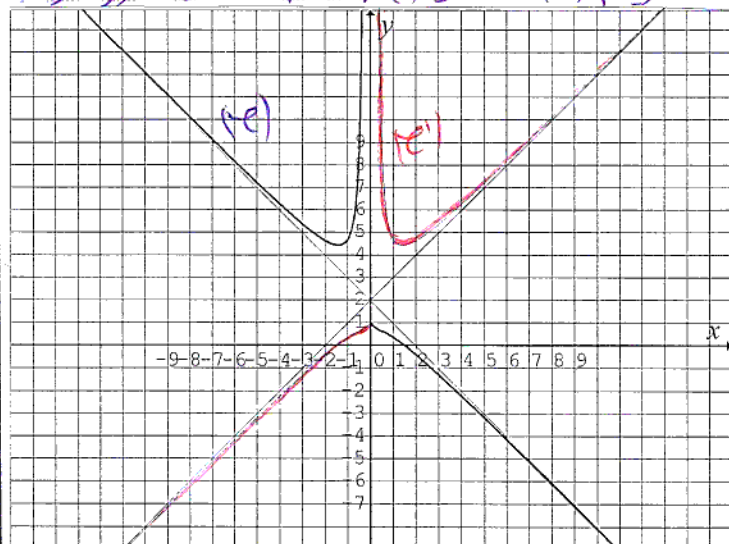
(6) لنبين أن (V_n) متناقصة: لدينا $M_{n+1} > M_n$
 $\frac{1}{2M_{n+1}+3} \leq \frac{1}{2M_n+3}$ ومنه $2M_{n+1}+3 \geq 2M_n+3$
بمعنى $V_{n+1} \leq V_n$ ومنه (V_n) متناقصة
لأن $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{2}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2M_n+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 (M_n) متزايدة و (V_n) متناقصة ولهما نفس النهاية $\frac{1}{2}$ إذن $M_n \sim \frac{1}{2}$

تمرين 2:

(1) العبارة المركبة للدوران r : $z' = w = e^{i\theta}(z-w)$
بما أن B هي صورة A بالدوران r الذي مركزه O وزاوية $-\frac{\pi}{3}$
لذا $z_B - z_O = e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z_A - z_O)$ ومنه $z_B/z_A = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

(P14) مستمرة ومتناقصة على $[-1, 5]$ و $f(1,5) = 0,01 > 0$ و $f(1,6) = -0,06 < 0$ ومنه
 حسب مبرهنه القيم المتوسطة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا
 $x \in]-\infty, 0[\cup]0, b[$ لـ $f(x) > 0$ و $x > b$ لـ $f(x) < 0$
 (ب) لدينا $g(a) = 1$ أي $e^{-1/a} = 1$ ومنه $\frac{1}{a} = 0$ و $a = \pm \infty$
 إذن $f(a) = -a + 1 + e^{-1/a} = -a + 1 + a^2$
 $1,96 < a^2 < 2,25$, $1,4 < -a < 1,5$, $-1,5 < a < -1,4$
 $4,36 < a^2 - a + 1 < 4,75$ ومنه $3,36 < a^2 < 3,75$
 $4,36 < f(a) < 4,75$

(ج) رسم (أ) نلاحظ (ب) بالنسبة لحاصل محور الترتيب

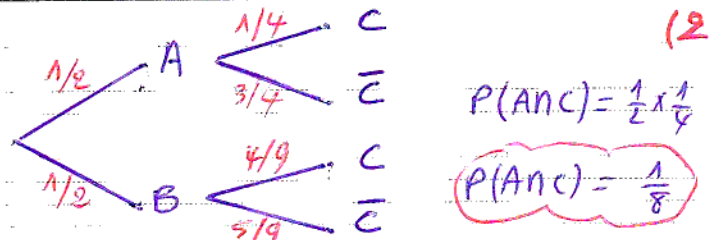


(P15) $n=0$: $M_0 = 2$, $b < M_0 \leq 2$ (مفككة)
 نفرض أن $b < M_n \leq 2$ ونبرهن $b < M_{n+1} \leq 2$
 $-\frac{1}{b} < \frac{1}{M_n} \leq -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{M_n} < \frac{1}{b}$, $b < M_n \leq 2$
 $e^{-1/b} + 1 < 1 + e^{-1/M_n} \leq 1 + e^{-1/2}$, $e^{-1/b} < e^{-1/M_n} \leq e^{-1/2}$
 لدينا : $b < M_{n+1} \leq 2$ ومنه $f(b) = 0$ و $1 + e^{-1/2} < 2$
 إذن ما أجل كل $n \in \mathbb{N}$, $b < M_n \leq 2$
 (ب) $M_{n+1} - M_n = f(M_n)$ ولدينا $b < M_n \leq 2$ فإن $f(M_n) < 0$
 ومنه $b < M_n \leq 2$ فإن $f(M_n) < 0$
 إذن (M_n) متناقصة تماماً
 (M_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة
 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{n+1} = l$ أي $f(l) = 0$ ومنه $l = b$

ثمة 4:

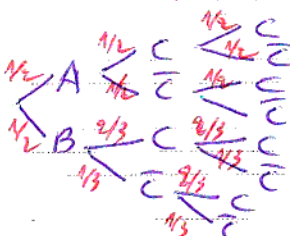
(1) بين أن : من أجل كل $x < -2$, $-x+2 < f(x) < -x+3$
 (ع) لتكن A مساحة العيز المستوي المصد ب (ع) و
 المستقيمت : $y=0$, $x=-3$ و $x=-2$ بين أن
 $4,5 < A < 5,5$

(1) مابقا لـ $x < 0$: $f(x) > -x+2$
 لبيان أن $f(x) < -x+3$ أي $x+1+e^{-1/x} < -x+3$
 $e^{-1/x} < 2 - \frac{1}{x}$, $x < -2$, $e^{-1/x} < 2 - \frac{1}{x}$
 $e^{-1/x} < 2 - \frac{1}{x} < 2 - \frac{1}{-2} = 2,5$ ومنه $e^{-1/x} < 2,5$
 $A = \int_{-3}^{-2} f(x) dx$: $x < 0$ لـ $f(x) > 0$ ولـ $x < 0$
 $-x+2 < f(x) < -x+3$ ومنه
 $\int_{-3}^{-2} (-x+2) dx < \int_{-3}^{-2} f(x) dx < \int_{-3}^{-2} (-x+3) dx$
 $4,5 < A < 5,5$ ومنه $[-\frac{x^2}{2} + 2x]_{-3}^{-2} < A < [-\frac{x^2}{2} + 3x]_{-3}^{-2}$



$$P(C) = P(ANC) + P(BNC) = \frac{1}{8} + \frac{8}{9} = \frac{25}{72}$$

$$P(A) = \frac{P(ANC)}{P(C)} = \frac{1/8}{25/72} = \frac{9}{25}$$



يمكن استعمال
 الشجرة التالية :

تمرين 4:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad (1. I)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 e^t = 0$$

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-1/x} + \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \frac{1}{x^2} = e^{-1/x} \left(\frac{-2x+1}{x^4} \right) \quad (2)$$

x	$-\infty$	a	0	1/2	$+\infty$
g'(x)	+	+	0	-	-
g(x)	0	↗	↗	↘	0

(3) مستمرة ومتزايدة على $[-1,5]$ و $f(-1,4) = 1,04 > 1$ و $f(-1,5) = 0,87 < 1$
 حسب مبرهنه القيم المتوسطة: $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا
 من جدول التغيرات لـ $a < x < 0$ فإن $g(x) \geq 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (1. II)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ (ع)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x - 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-1/x} - 1) = 0 \quad (2)$$

كذلك عند $x=0$ ومنه (د) مستقيم مقارب لـ (ع)
 (ع) فوق (د) لـ $f(x) - y > 0$ أي $e^{-1/x} - 1 > 0$

$$e^{-1/x} > 1 \text{ و } \frac{1}{x} < 0 \text{ و } x < 0$$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = g(x) = 1 \quad (P3)$$

$$f(x) \geq 0 \text{ , } a \leq x < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ , } x \in]-\infty, a[\cup]0, +\infty[$$

x	$-\infty$	a	0	b	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	+	-
f(x)	$+\infty$	↘	↗	↘	$-\infty$

(ب) $f'(x) = g'(x) = \left(\frac{-2x+1}{x^4} \right) e^{-1/x}$
 نعلم وتغير إشارة النقطة هي $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + e^2)$