

## الموضوع الثالث

### التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح  $n$  نضع :  $A(n) = n^2 - n + 2007$

(1) أ - حلل إلى جداء عوامل أولية العددين 4014 و  $A(1)$  .

ب - أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و  $A(1)$  .

(2) بين أنه إذا كان  $n$  يقسم 3 فإن  $A(n)$  يقسم 3 ، وهل العكس صحيح ؟ برر إجابتك .

(3) تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح  $n$  :  $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n$

(4) بين أنه إذا كان  $A(n)$  عدد فردي فإن  $A(n+1)$  عدد فردي .

(5) عين الأعداد الصحيحة  $n$  التي يكون من أجلها  $A(n)$  يقسم  $A(1)$  .

### التمرين الثاني:

عين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح الوحيد مع التبرير

(1) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية  $y' + 3y = 0$

|                         |                          |               |                |
|-------------------------|--------------------------|---------------|----------------|
| $y = Ce^{\frac{1}{3}x}$ | $y = Ce^{-\frac{1}{3}x}$ | $y = Ce^{3x}$ | $y = Ce^{-3x}$ |
|-------------------------|--------------------------|---------------|----------------|

(2) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية  $y' - 2y = 6$

|                             |                   |                             |                   |
|-----------------------------|-------------------|-----------------------------|-------------------|
| $y = Ce^{\frac{1}{2}x} + 3$ | $y = Ce^{2x} - 3$ | $y = Ce^{\frac{1}{2}x} + 3$ | $y = Ce^{2x} + 3$ |
|-----------------------------|-------------------|-----------------------------|-------------------|

(3) العدد  $3 - \ln(e^2) + e$  يساوي

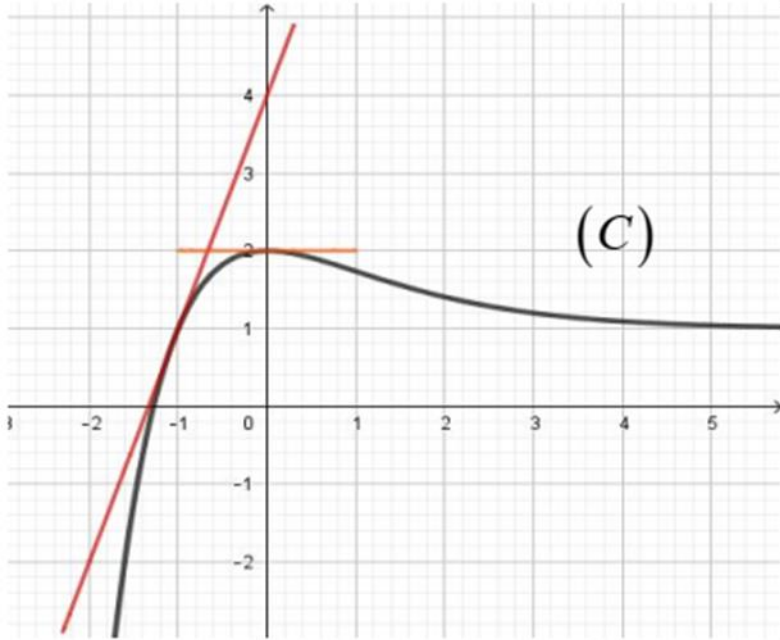
|         |     |     |         |
|---------|-----|-----|---------|
| $1 + e$ | $2$ | $0$ | $2 - e$ |
|---------|-----|-----|---------|

(4) العدد  $e^{-3\ln(2)}$  يساوي

|               |               |     |     |
|---------------|---------------|-----|-----|
| $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{8}$ | $8$ | $1$ |
|---------------|---------------|-----|-----|

(5) حلول المعادلة  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$  هي

|                |                                                                           |                      |            |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------|------------|
| $\{e^2; e^3\}$ | $\left\{\ln\left(\frac{1}{2}\right); \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ | $\{\ln(2); \ln(3)\}$ | $\{2; 3\}$ |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------|------------|



المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ، المنحنى  $(C)$  في الشكل هو لدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  
 $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان .

1. أ - بقراءة بيانية عين  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم فسر النهاية الأخيرة بيانيا .

ب - عين كل من :  $f(0)$  ،  $f(1)$  ،  $f'(0)$  ،  $f'(1)$  .

ج - اعتمادا على ما سبق جد قيمة كل من  $a$  و  $b$  ثم استنتج عبارة  $f(x)$  .

2. أ - بين أن المعادلة تقبل  $f(x) = 0$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-1,4 < \alpha < -1,2$  .

ب - استنتج إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

3. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = (|x| + 1)e^{-x} + 1$

- احسب كلا من  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x) - 2}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x) - 2}{x}$  ثم فسر النتيجة هندسيا ، (نقبل أن :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$ )



نضع فيما يلي :  $f(x) = (x + 1)e^{-x} + 1$  ونعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $g(x) = x - \frac{x + 2}{e^x}$  و

$(C_g)$  منحنائها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ،  $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$  ،

1. أ - أحسب كلا من  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  .

ب - بين أن المستقيم  $(T)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $g$  بجوار  $(+\infty)$  .

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $g'(x) = f(x)$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أكتب معادلة المماس ( $\Delta$ ) للمنحنى ( $C_g$ ) في النقطة التي فصلتها 1 - .

4. بين أن  $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$  ثم استنتج حصرا للعدد  $g(\alpha)$ .

5. أ- أحسب  $g(0)$  ثم أنشئ كلا من ( $\Delta$ ) ، ( $T$ ) والمنحنى ( $C_g$ ) .

ب -  $m$  وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة  $g(x) = x + m$  .

بالتوفيق

انتهى

﴿ ترقبوا الحلول قريبا إن شاء الله ﴾

## حل الموضوع الثالث

### التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح  $n$  نضع :  $A(n) = n^2 - n + 2007$

(1) أ - تحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين 4014 و  $A(1)$  :

$$A(1) = (1)^2 - 1 + 2007 = 2007 = 3^2 \times 223$$

$$4014 = 2A(1) = 2 \times 3^2 \times 223$$

ب - إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و  $A(1)$  :

$$p \gcd(A(1); 4014) = p \gcd(A(1); 2A(1)) = A(1) = 2007$$

(2) التبين أنه إذا كان  $n$  يقسم 3 فإن  $A(n)$  يقسم 3 :

لدينا : 3 يقسم  $n$  وبالتالي 3 يقسم  $n^2$  و 3 يقسم  $n$  وبالتالي 3 يقسم  $-n$

ومن جهة أخرى 3 يقسم 2007 ومنه : إذا كان  $n$  يقسم 3 فإن  $n^2 - n + 2007$  يقسم 3 أي : إذا كان  $n$  يقسم 3 فإن  $A(n)$  يقسم 3

العكس غير صحيح لأن :  $A(4) = (4)^2 - 4 + 2007 = 2019$  أي أن  $A(4)$  يقسم 3 من أجل  $n = 4$  لكن 3 لا يقسم 4 .

(3) التحقق أنه من أجل كل عدد صحيح  $n$  :  $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n$

$$\begin{aligned} (n+1)^2 - (n+1) + 2007 &= [n^2 + 2n + 1] - (n+1) + 2007 \\ &= n^2 + 2n - n + 1 - 1 + 2007 \\ &= n^2 + n + 2007 \\ &= (n - n + 2007) + 2n \end{aligned}$$

(4) التبين أنه إذا كان  $A(n)$  عدد فردي فإن  $A(n+1)$  عدد فردي :

إذا كان  $A(n)$  فردي فإنه يوجد عدد صحيح  $k$  :  $A(n) = 2k + 1$

لدينا :  $A(n) = n^2 - n + 2007$  ومنه :  $A(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) + 2007$  أي أن :

$$A(n+1) = A(n) + 2n + 2k + 1 + 2n = 2(k+n) + 1$$

نضع :  $k' = k + n$  ومنه :  $A(n+1) = 2k' + 1$  حيث  $k'$  عدد صحيح

الخلاصة : إذا كان  $A(n)$  عدد فردي فإن  $A(n+1)$  عدد فردي كذلك .

(5) تعيين الاعداد الصحيحة  $n$  التي يكون من أجلها  $A(n)$  يقسم  $A(1)$  :

$A(n)$  يقسم  $A(1)$  معناه  $n^2 - n + 2007$  يقسم 2007 ونعلم أن مجموعة قواسم 2007 هي :

$\{-2007; -669; -223; -9; -3; -1; 1; 3; 9; 223; 669; 2007\}$  ومنه

|                    |       |      |      |    |    |    |   |   |   |     |     |      |
|--------------------|-------|------|------|----|----|----|---|---|---|-----|-----|------|
| $n^2 - n + 2007 =$ | -2007 | -669 | -223 | -9 | -3 | -1 | 1 | 3 | 9 | 223 | 669 | 2007 |
|--------------------|-------|------|------|----|----|----|---|---|---|-----|-----|------|

ومنه  $n = 0$  أو  $n = 1$

التمرين الثاني:

تعين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح الوحيد مع التبرير

(1) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية  $y' + 3y = 0$  أي  $y' = -3y$  حلها هو  $y = Ce^{-3x}$

(2) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية  $y' - 2y = 6$  أي  $y' = 2y + 6$  حلها هو  $y = Ce^{2x} - \frac{6}{2}$  أي  $y = Ce^{2x} - 3$

(3) العدد  $3 - \ln(e^2) + e = 3 - 2 + e = 1 + e$  : لأن  $1 + e$  يساوي  $3 - \ln(e^2) + e$

(4) العدد  $e^{-3\ln(2)}$  يساوي  $\frac{1}{8}$  : لأن  $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} = e^{\ln(2)^{-3}} = e^{-3\ln(2)}$

(5) حلول المعادلة  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$  هي  $\{\ln(2); \ln(3)\}$  لأن : بوضع  $t = e^x$  تصبح المعادلة  $t^2 - 5t + 6 = 0$

نحسب المميز :  $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$  ومنه تقبل حلين متمايزين هما :  $t_1 = 3$  و  $t_2 = 2$

بالعودة الى المتغير الأصلي :  $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$  ،  $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$

التمرين الثالث:

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ، المنحنى  $(C)$  في الشكل هو لدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما

يلي :  $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$  حيث  $a$  و  $b$  عددان حقيقيان .

1. أ - بقراءة بيانية تعين  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  وتفسير النهاية الأخيرة بيانيا .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b)e^{-x} + 1 = 1 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b)e^{-x} + 1 = -\infty$$

تفسير النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  بيانيا :

المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  هو مستقيم مقارب افقي موازي لمحور الفواصل بجوار  $(+\infty)$  .

ب - تعين كل من :  $f(0)$  ،  $f(1)$  ،  $f'(0)$  ،  $f'(-1)$  .

$$f(-1)=1 \text{ ، } f(0)=2$$

-  $f'(0)$  هو معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 وهو افقي وعليه:  $f'(0)=0$

-  $f'(-1)$  هو معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها -1 والمار بالنقطتين  $(0;4)$  و  $(-2;-2)$  وعليه :

$$f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{6}{2} = 3$$

ج - اعتمادا على ما سبق ايجاد قيمة كل من  $a$  و  $b$  واستنتاج عبارة  $f(x)$  :

$$\left\{ \begin{matrix} b=1 \\ a=1 \end{matrix} \right. : \text{ ومنه } \left\{ \begin{matrix} b=1 \\ (-a+1)e=0 \end{matrix} \right. : \text{ ومنه } \left\{ \begin{matrix} b+1=2 \\ (-a+b)e+1=1 \end{matrix} \right. \text{ تكافئ } \left\{ \begin{matrix} (a(0)+b)e^0+1=2 \\ (a(-1)+b)e^{-1}+1=1 \end{matrix} \right. \text{ تكافئ } \left\{ \begin{matrix} f(0)=2 \\ f(-1)=1 \end{matrix} \right. \text{ لدينا :}$$

2. أ - تبيان أن المعادلة تقبل  $f(x)=0$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-1,4 < \alpha < -1,2$

لدينا :  $f$  مستمرة علي  $[-1,4; -1,2]$  و  $f(-1,2)=0,33$  و  $f(-1,4)=-0,62$  و  $f(-1,2) \times f(-1,4) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-1,4 < \alpha < -1,2$

ب - استنتاج إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

نلخص النتائج في الجدول التالي :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $f(x)$ | -         | 0        | +         |

3. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = (|x|+1)e^{-x} + 1$

- حساب كلا من  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$  ثم تفسر النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cancel{x}e^{-x} + e^{-x} - 1}{\cancel{x}} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(-x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\cancel{x}e^{-x} + e^{-x} - 1}{\cancel{x}} \right) = -2$$

التفسير الهندسي :

الدالة لا تقبل الاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها 0 ومنحنائها يقبل يقبل نصفى مماسي معامل توجيهها 0 و -2 .



نضع فيما يلي:  $f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$  ونعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $g(x) = x - \frac{x+2}{e^x}$  و

$(C_g)$  منحناها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ،  $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm})$

1. أ - حساب كلا من  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 - \frac{1+\frac{2}{x}}{e^x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = +\infty$$

ب - تبيان أن المستقيم  $(T)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $g$  بجوار  $(+\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x+2}{e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = 0$$

فإن المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $g$  بجوار  $(+\infty)$ .

2. أ - تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $g'(x) = f(x)$

$g$  تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = \left( x - \frac{x+2}{e^x} \right)' = \left( x - (x+2)e^{-x} \right)' = 1 - ((1-x-2)e^{-x}) = 1 - (-x-1)e^{-x} = f(x)$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا من السؤال السابق :  $g'(x) = f(x)$  ومنه إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $f(x)$  وعليه :

- $g'(x) = 0$  تكافئ  $f(x) = 0$  ومنه  $x = \alpha$
- $g'(x) < 0$  تكافئ  $f(x) < 0$  ومنه  $x \in ]-\infty; \alpha[$  ومنه  $g$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; \alpha[$
- $g'(x) > 0$  تكافئ  $f(x) > 0$  ومنه  $x \in ]\alpha; +\infty[$  ومنه  $g$  متزايدة تماما على المجال  $]\alpha; +\infty[$  .

جدول التغيرات :

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         | 0           | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $g(\alpha)$ | $+\infty$ |

3. كتابة معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_g)$  في النقطة التي فاصلتها 1 - :

$$(\Delta): y = g'(-1)(x - (-1)) + g(1)$$

ولدينا :  $g'(-1) = f(-1) = 1$  وكذلك  $g(-1) = -1 - e$  ومنه :  $(\Delta): y = 1(x + 1) - 1 - e$  ومنه :  $(\Delta): y = x - e$

4. تبيان أن  $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$  واستنتاج حصرا للعدد  $g(\alpha)$ .

$$g(\alpha) = \alpha - (\alpha + 2)e^{-\alpha} \text{ لدينا}$$

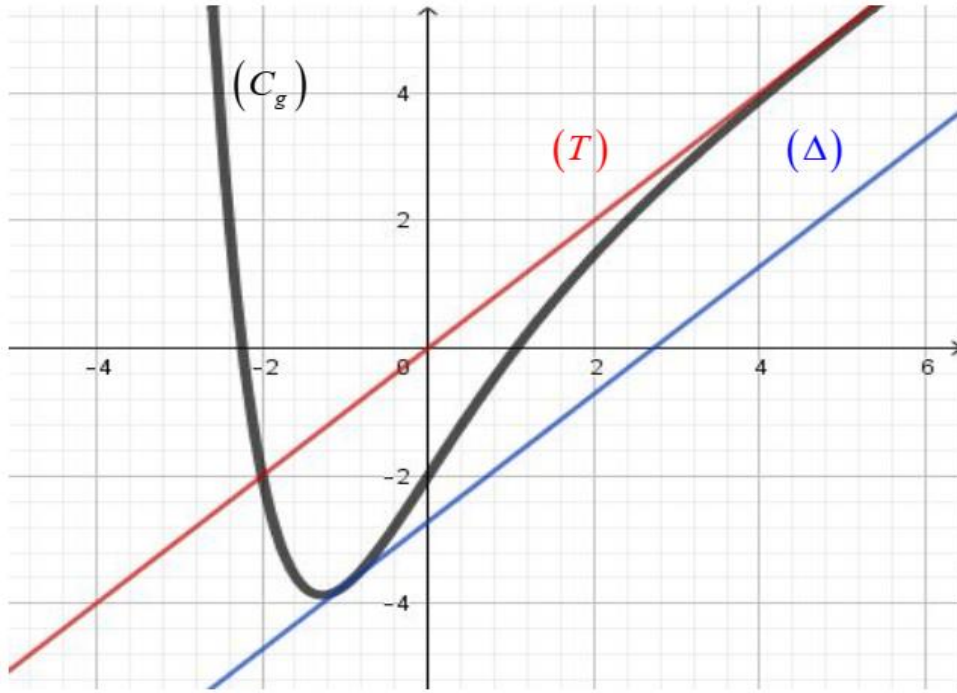
وكذلك لدينا :  $f(\alpha) = 0$  تكافئ  $(\alpha + 1)e^{-\alpha} + 1 = 0$  نستخرج منها قيمة  $e^{-\alpha}$  أي :  $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha + 1}$  ونعوضها في  $g(\alpha)$

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \alpha - (\alpha + 2) \frac{-1}{\alpha + 1} \\ &= \alpha + \frac{(\alpha + 1) + 1}{\alpha + 1} \\ &= \alpha + \frac{\alpha + 1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 1} \\ &= \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

نجد :

$$g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1} \text{ ومنه :}$$

5. أ - حساب  $g(0)$  ثم أنشاء كلا من  $(\Delta)$ ،  $(T)$  والمنحنى  $(C_g)$  :  $g(0) = 0 - \frac{0+2}{e^0} = 0 - \frac{0+2}{1} = -2$



ب - المناقشة حسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $g(x) = x + m$  :

حلول المعادلة  $g(x) = x + m$  هي فواصل نقط تقاطع  $(C_g)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = x + m$  والموازي للمستقيمين  $(T)$  و  $(\Delta)$

- من أجل  $m \in ]-\infty; -e[$  المعادلة ليس لها حلول .
- من أجل  $m = -e$  المعادلة لها حل مضاعف سالب تماما
- من أجل  $m \in ]-e; -2[$  المعادلة لها حلان سالبان تماما .
- من أجل  $m = -2$  المعادلة لها حلان أحدهما سالب و الآخر معدوم .
- من أجل  $m \in ]-2; 0[$  المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة .
- من أجل  $m \in ]0; +\infty[$  المعادلة لها حل واحد سالب تماما .