

التمرين الأول

- يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللمس .
- 1 - نسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا وفي آن واحد .
♣ احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :
A - " الكرات المسحوبة كلّها حمراء " .
B - " توجد كرة واحدة حمراء في السحب " .
C - " توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب " .
D - " الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة " .
 - 2 - ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث $n \in \mathbb{N}$ مع $n \geq 2$ ثمّ نسحب كرتين على التوالي وبدون إرجاع .
♣ نفرض أنّ سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة ، وسحب كرة سوداء يساوي (+5) نقطة .
نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها .
أ - عيّّن قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X والأمل الرياضي $E(X)$.
ب - عيّّن قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .
ج - كيف نختار عدد الكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟

التمرين الثاني

- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كإيلي : $f(x) = \frac{3x}{x+1}$
- ونسَمّي (C_f) منحنيا البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوثيقة المرفقة) .
- (I) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كإيلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

- 1 - على الوثيقة المرفقة مثّل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (دون حسابها وموضّحاً خطوط الإنشاء) .
- 2 - ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .
- 2 - برهن بالتراجع أنّه من كل عدد طبيعي $n : u_n < 2$.
- 3 - أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ثمّ استنتج أنّها متقاربة . عيّّن نهايتها .

(II) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

- 1 - برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يَطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
- 2 - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n . تحقق من نهاية المتتالية (u_n) .

(III) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \frac{u_0}{u_0 - 2} + \frac{u_1}{u_1 - 2} + \frac{u_2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{u_n}{u_n - 2}$$

التمرين الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$.

(II) المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C, D ذات اللواحق $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ ، $z_D = \overline{z_C}$ على الترتيب

1 - أ - بين أن النقط A, B, C, D وتنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحق $z_\Omega = 3$.

ب - بين أن : $z_A = \left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963}$.

2 - لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المبدأ O .

أ - عين عمدة وطويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .

ب - استنتج طبيعة التحويل T الذي مركزه النقطة B ويحول E إلى C ثم اكتب الصيغة المركبة له .

(III) 1 - عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحق z التي تحقق : $|iz - 3i| = |-3 + i\sqrt{3}|$.

2 - عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحق غير المعدومة z التي تحقق : $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كإيلي : $g(x) = 1 + x^2 + \ln x$.

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $0.32 < \alpha < 0.33$.

3 - استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كإيلي : $f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$.

ونسَمي (C_f) منحنيا البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2 - بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 - بين أن : $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ثم عين حصراً للعدد $f(\alpha)$.

4 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ واستنتج أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلته .

- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 - أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها . اكتب معادلة المماس (T) .

6 - أنشئ المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) علماً أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_0 و x_1 حيث : $0.1 < x_0 < 0.2$ و $1.5 < x_1 < 1.6$.

_____ بالتوفيق والنجاح إن شاء الله في شهادة البكالوريا _____

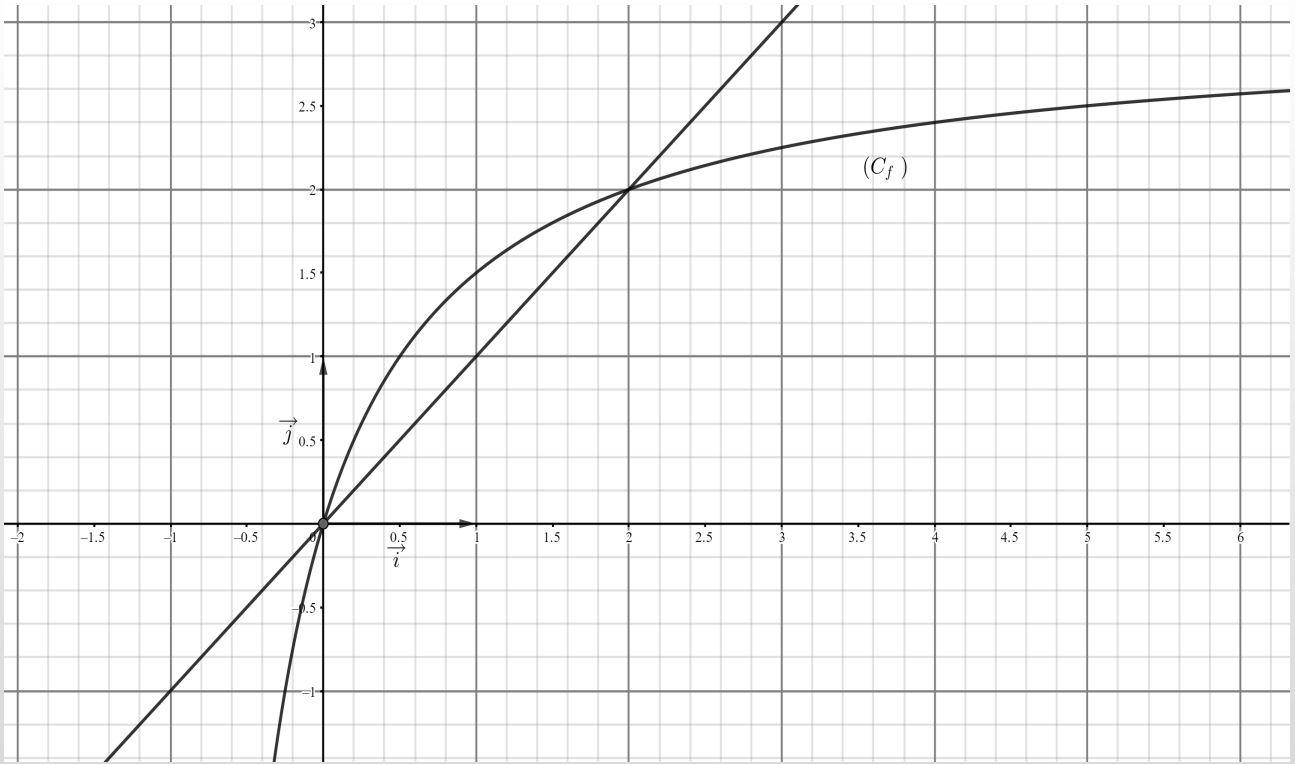
أعظم هندسة في العالم :

بناء جسرٍ من الأمل ... على نهرٍ من اليأس !!

الإسم واللقب :

الوثيقة المرفقة

القسم :

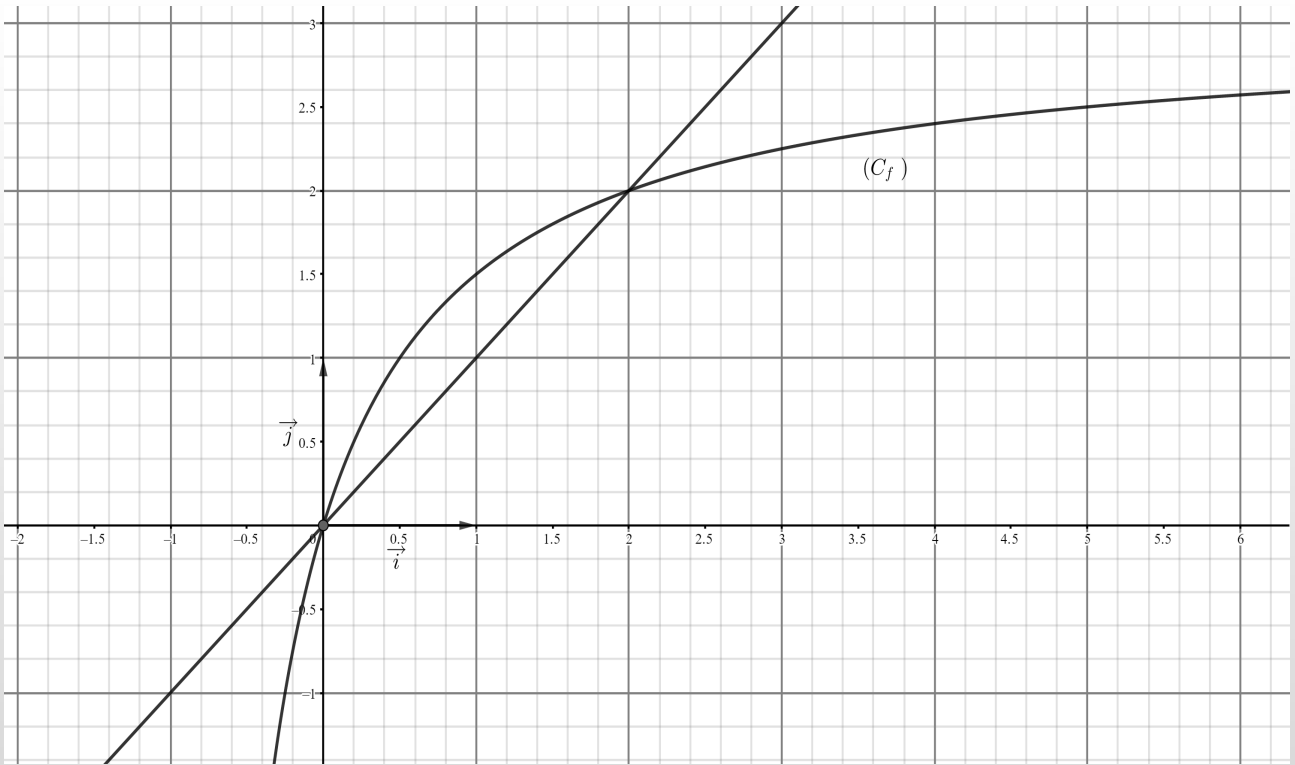


يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

الإسم واللقب :

الوثيقة المرفقة

القسم :



يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

التمرين الأول

1 - ♣ حساب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

$$P(C) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^2 + C_3^2 \cdot C_5^1 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{46}{56}, P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}, P(A) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}$$

$$, P(D) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^2 + C_3^2 \cdot C_5^1}{C_8^3} = \frac{45}{56} و$$

2 - أ - تعيين قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X والأمل الرياضي $E(X)$:

لنعيّن قيم المتغير العشوائي والتي تحقّق : $x_i \in \{-20; -5; 10\}$ مع $i \in \{1; 2; 3\}$.
لدينا :

$$A_{n+5}^2 = \frac{(n+5)!}{(n+5-2)!} = \frac{(n+5)!}{(n+3)!} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!} = (n+5)(n+4) = n^2 + 9n + 20$$

وعليه :

$$P(X = -5) = \frac{2A_5^1 \cdot A_n^1}{A_{n+5}^2} = \frac{10n}{n^2 + 9n + 20}, P(X = -20) = \frac{A_5^2}{A_{n+5}^2} = \frac{20}{n^2 + 9n + 20}$$

$$P(X = 10) = \frac{A_n^2}{A_{n+5}^2} = \frac{n(n-1)}{n^2 + 9n + 20} و$$

لنلخص ذلك في الجدول التالي :

x_i	-20	-5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{n^2 + 9n + 20}$	$\frac{10n}{n^2 + 9n + 20}$	$\frac{n^2 - n}{n^2 + 9n + 20}$

تعيين الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = -20 \left(\frac{20}{n^2 + 9n + 20} \right) - 5 \left(\frac{10n}{n^2 + 9n + 20} \right) + 10 \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 9n + 20} \right) = \frac{10n^2 - 60n - 400}{n^2 + 9n + 20}$$

ب - تعيين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة : حتى تكون اللعبة عادلة يكون $E(X) = 0$

$$E(X) = 0 \text{ معناه } \frac{10n^2 - 60n - 400}{n^2 + 9n + 20} = 0 \text{ أي } 10n^2 - 60n - 400 = 0 \text{ معناه } n = 10$$

ج - تبين كيف نختار عدد الكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟ : لدينا : $E(X) = \frac{10(n+4)(n-10)}{n^2 + 9n + 20}$

$$\cdot \frac{10(n+4)}{n^2 + 9n + 20} > 0 \text{ لأن } n > 10 \text{ أي } (n-10) > 0 \text{ أي } E(X) > 0$$

ومنه حتى تكون اللعبة مربحة نأخذ الكرات السوداء أكبر تماما من 10 كرات .

التمرين الثاني

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 1} = \frac{3u_n + 3 - 3}{u_n + 1} = \frac{3u_n + 3}{u_n + 1} - \frac{3}{u_n + 1} = 3 \left(\frac{u_n + 1}{u_n + 1} \right) - \frac{3}{u_n + 1} = 3 - \frac{3}{u_n + 1}$$

لدينا :

(I) 1 - التمثيل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (الوثيقة المرفقة) .

2 - وضع التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :

من خلال البيان نلاحظ أنّ حدود المتتالية (u_n) تتزايد وبالتالي نُخمن أنّها متزايدة كلما نلاحظ أنّها تتقارب نحو نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المنصف الأول وعليه نُخمن أنّها متقاربة نحو النقطة ذات الفاصلة 2 .

3 - البرهان بالتراجع أنّه من كل عدد طبيعي $n : u_n < 2$:

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ ونعلم أنّ $1 < 2$ ومنه $u_0 < 2$ وبالتالي الخاصية " $u_n < 2$ " محققة من أجل $n = 0$.

- نفرض أنّ $u_n < 2$ ونبرهن أنّ $u_{n+1} < 2$.

لدينا من الفرض $u_n < 2$ بإضافة العدد 1 نجد : $u_n + 1 < 3$ بوضع مقلوب الطرفين نجد : $\frac{1}{u_n + 1} > \frac{1}{3}$ بضرب الطرفين في

العدد -3 نجد : $-\frac{3}{u_n + 1} < -1$ بإضافة العدد 3 نحصل على : $u_{n+1} < 2$.

ومنه من أجل كل n عدد طبيعي فإنّ : $u_n < 2$.

ملاحظة مهمّة : هنا يمكنك استعمال الدالة المرفقة للانتقال من u_n إلى u_{n+1} وهو الأفضل .

3 - اثبات أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتاج أنّها متقاربة . تعيين نهايتها :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. نلاحظ من خلال البيان أنّه من كل x من المجال $[0; 2]$ المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y = x$

ومنه من أجل كل x من المجال $[0; 2]$ فإنّ : $f(x) - x > 0$.

بما أنّ $0 \leq u_n < 2$ (واضح أنّ $0 \leq u_n$) فإنّ : $f(u_n) - u_n \geq 0$ وعليه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

بما أنّ المتتالية (u_n) ومتزايدة و $u_n < 2$ أي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو 2 .
تعيين النهاية :

بما أنّ المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ مع l عدد حقيقي .

لإيجاد l نضع $l = f(l)$ معناه $l = \frac{3l}{l+1}$ أي $l^2 + l = 3l$ إذن $l^2 - 2l = 0$ وعليه $l(l - 2) = 0$ هذا معناه : $l = 2$ أو

$l = 0$ وبما أنّ $u_0 = 1$ والمتتالية (u_n) متزايدة فإنّ : $l = 2$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

(II) 1 - البرهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدّها الأول :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{3u_n}{u_n + 1}} = 1 - \frac{2(u_n + 1)}{3u_n} = \frac{3u_n - 2u_n - 2}{3u_n} = \frac{u_n - 2}{3u_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n - 2}{u_n} \right) = \frac{1}{3} v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = 1 - \frac{2}{1} = -1$

2 - كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = v_0 q^n$ ومنه $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ وكذلك $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ ومنه $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$ ومنه $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.
التحقق من نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 2 \quad \text{لأنّ} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \left(-1 < \frac{1}{3} < 1 \right)$$

(III) كتابة بدلالة n المجموع S_n :

$$\text{لدينا : } \frac{u_n}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{u_n - 2}{u_n}} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_n} - \frac{2}{u_n}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{u_n}} = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{-\frac{1}{(3)^n}} = -(3)^n$$

$$S_n = -(3)^0 - (3)^1 - (3)^2 - \dots - (3)^n = - (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n) = - \left(\frac{1 - (3)^{n+1}}{1 - 3} \right) = \frac{1 - (3)^{n+1}}{2}$$

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$:

لدينا $(z^2 - 6z + 21) = 0$ أو $(z^2 + 3) = 0$ معناه : $(z^2 + 3) = 0$ أو $(z^2 - 6z + 21) = 0$

نبدأ بالمعادلة الأولى $(z^2 + 3) = 0$ معناه $z^2 = -3$ أي $z^2 = 3i^2$ وعليه $z = i\sqrt{3}$ و $z = -i\sqrt{3}$.

الآن نمر إلى المعادلة الثانية $(z^2 - 6z + 21) = 0$ نحسب المميز $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(21) = -48 = 48i^2 = (4\sqrt{3}i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{6 - 4i\sqrt{3}}{2} = 3 - 2i\sqrt{3} \\ z_2 = \frac{6 + 4i\sqrt{3}}{2} = 3 + 2i\sqrt{3} \end{cases} \text{ وعليه حلول المعادلة الثانية هي :}$$

إذن حلول المعادلة $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$ هي : $S = \{-i\sqrt{3}; i\sqrt{3}; 3 - 2i\sqrt{3}; 3 + 2i\sqrt{3}\}$.

(II) 1 - أ - تبين أن النقط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة 3 :

$$\begin{aligned} |z_\Omega - z_A| &= |3 - \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}| = |3 - \sqrt{3}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ |z_\Omega - z_B| &= |3 - \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}| = |3 - \sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ |z_\Omega - z_C| &= |3 - (3 + 2i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \\ |z_\Omega - z_D| &= |3 - (3 - 2i\sqrt{3})| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

واضح أن : $|z_\Omega - z_A| = |z_\Omega - z_B| = |z_\Omega - z_C| = |z_\Omega - z_D|$ أي : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$.
ومنه النقط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) .

ب - تبين أن : $\left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963} = z_A$ لدينا :

$$\left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963} = \left(\frac{2 - 2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1963} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1906} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1963}$$

$$\left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963} = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^{1906} + (e^{i\frac{\pi}{3}})^{1963} = e^{-i\frac{1906\pi}{3}} + e^{i\frac{1963\pi}{3}}$$

$$e^{i\left(\frac{-1906\pi - \pi}{3}\right)} + e^{i\left(\frac{1963\pi + \pi}{3}\right)} = e^{-i635\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i654\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1906} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{1963} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = z_A$$

أ - تعيين عمدة وطويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ ثم استنتاج طبيعة المثلث BEC :

نظيرة D بالنسبة إلى O معناه : $z_E = -z_B = -3 + 2i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا : $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3}$ و $\left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_E - z_B|} = \frac{BC}{BE} = 1$.

ب - استنتاج طبيعة التحويل T الذي مركزه النقطة B ويحول E إلى C ثم كتابة الصيغة المركبة له :

لدينا : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_C - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_B)$ إذن دوران T مركزه النقطة B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.
والعبارة المركبة لهذا التحويل هي :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot z + z_B(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + z_B\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

1 - تعيين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|iz - 3i| = |-3 + i\sqrt{3}|$

لدينا : $|iz - 3i| = |-3 + i\sqrt{3}|$ تكافئ : $|i(x + iy) - 3i| = \sqrt{(-3)^2 + 3}$ تكافئ : $|-y + i(x - 3)| = \sqrt{12}$ تكافئ : $(x - 3)^2 + y^2 = 12$ إذن (E) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(3; 0)$ ونصف قطرها $r = 2\sqrt{3}$.

2 - تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z التي تحقق : $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$:
لدينا $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \arg(z) - \arg(\bar{z})$ ونعلم أنّ : $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ وعليه $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2\arg(z)$ وعليه حتى تكون $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$ يكون $\arg(z) = k\pi$ يكافئ : $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = k\pi$ إذن (Γ) هي محور الفواصل باستثناء النقطة O.

التمرين الرابع

(I) 1 - دراسة تغيّرات الدالة g .

النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2 + \ln x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 + \ln x) = -\infty$

المشتقة : الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

نلاحظ أنّه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإنّ : $g(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما .

جدول التغيّرات :

x	0	$+\infty$
g'(x)		+
g(x)	$-\infty$	$+\infty$

2 - تبين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيداً α حيث : $0.32 < \alpha < 0.33$:

لدينا $g(0.32) = -0.037$ و $g(0.33) = 0.00023$.
من جدول التغيّرات لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.32; 0.33[$ و $g(0.32) \times g(0.33) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيداً α حيث $0.32 < \alpha < 0.33$.

3 - استنتاج حسب قيم x إشارة g(x) على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
g(x)		-	+

(II) 1 - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

• $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ لأنّ : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-x + \frac{2 + \ln x}{x}\right) = -\infty$

$\left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \right\}$ لأنّ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2 + \ln x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$

2 - تبين أنّه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدالة f :

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :
$$f'(x) = -1 + \left(\frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln x)}{x^2} \right) = -1 + \frac{-\ln x - 1}{x^2} = \frac{-x^2 - \ln x - 1}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	

3 - تبين أنّ : $f(\alpha) = 2 \left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha \right)$ ثمّ تعيين حصراً للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : (1) $f(\alpha) = -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha}$ ولدينا : $g(\alpha) = 0$ أي : $1 + \alpha^2 + \ln \alpha = 0$ ومنه $\ln \alpha = -(1 + \alpha^2)$ بالتعويض في (1) نجد :

$$f(\alpha) = -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} = -\alpha + \frac{2 - (1 + \alpha^2)}{\alpha} = -\alpha + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} = -\alpha + \frac{1}{\alpha} - \alpha = \frac{1}{\alpha} - 2\alpha = 2 \left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha \right)$$

4 - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ واستنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

ومنّه المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

- دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) : لدينا : $f(x) - y = f(x) + x = \frac{2 + \ln x}{x}$

إشارة $f(x) + x$ من إشارة $2 + \ln x = 0$ لأنّ $x > 0$.

لدينا : $f(x) + x = 0$ معناه $\frac{2 + \ln x}{x} = 0$ أي $2 + \ln x = 0$ معناه $\ln x = -2$ ومنه $x = e^{-2}$.

- لـ $x > e^{-2}$ معناه $\ln x > -2$ أي $2 + \ln x > 0$ ومنه $f(x) - y > 0$ ومنه $f(x) > y$ ومنه (C_f) فوق (Δ) على المجال $]e^{-2}; +\infty[$.

- لـ $x < e^{-2}$ معناه $\ln x < -2$ أي $2 + \ln x < 0$ ومنه $f(x) - y < 0$ ومنه $f(x) < y$ ومنه (C_f) تحت (Δ) على المجال $]0; e^{-2}[$.

- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $(e^{-2}; -e^{-2})$ ، $((C_f) \cap (\Delta) = \{(e^{-2}; -e^{-2})\})$.

5 - اثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها . كتابة معادلة المماس (T) :

نعتبر النقطة $A(x_0; f(x_0))$.

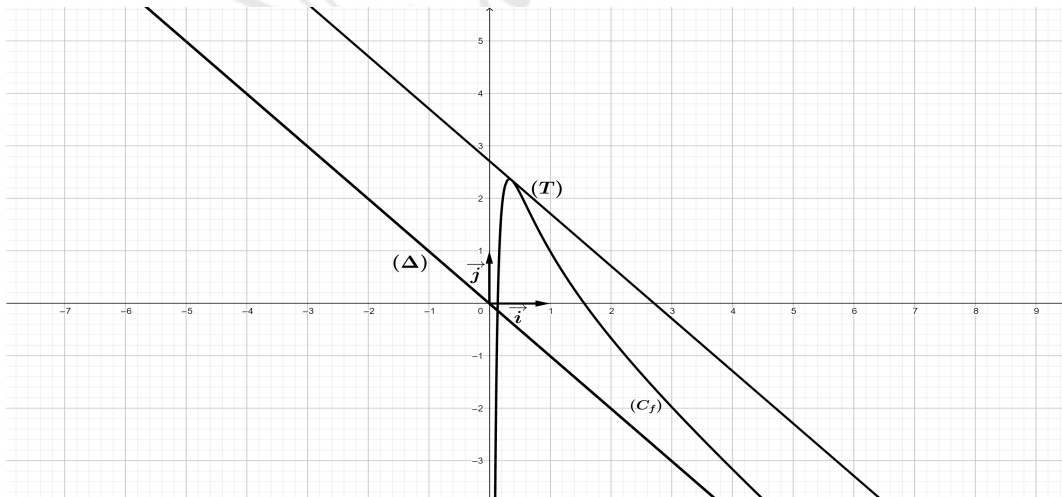
المماس (T) عند النقطة A يوازي المستقيم (Δ) معناه $f'(x_0) = -1$ معناه $-\frac{g(x_0)}{x_0^2} = -1$ أي $g(x_0) = x_0^2$ أي

$1 + x_0^2 + \ln x_0 = x_0^2$ ومنه $x_0 = e^{-1}$ وعليه إحداثيات النقطة A التي يكون عندها المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) هي

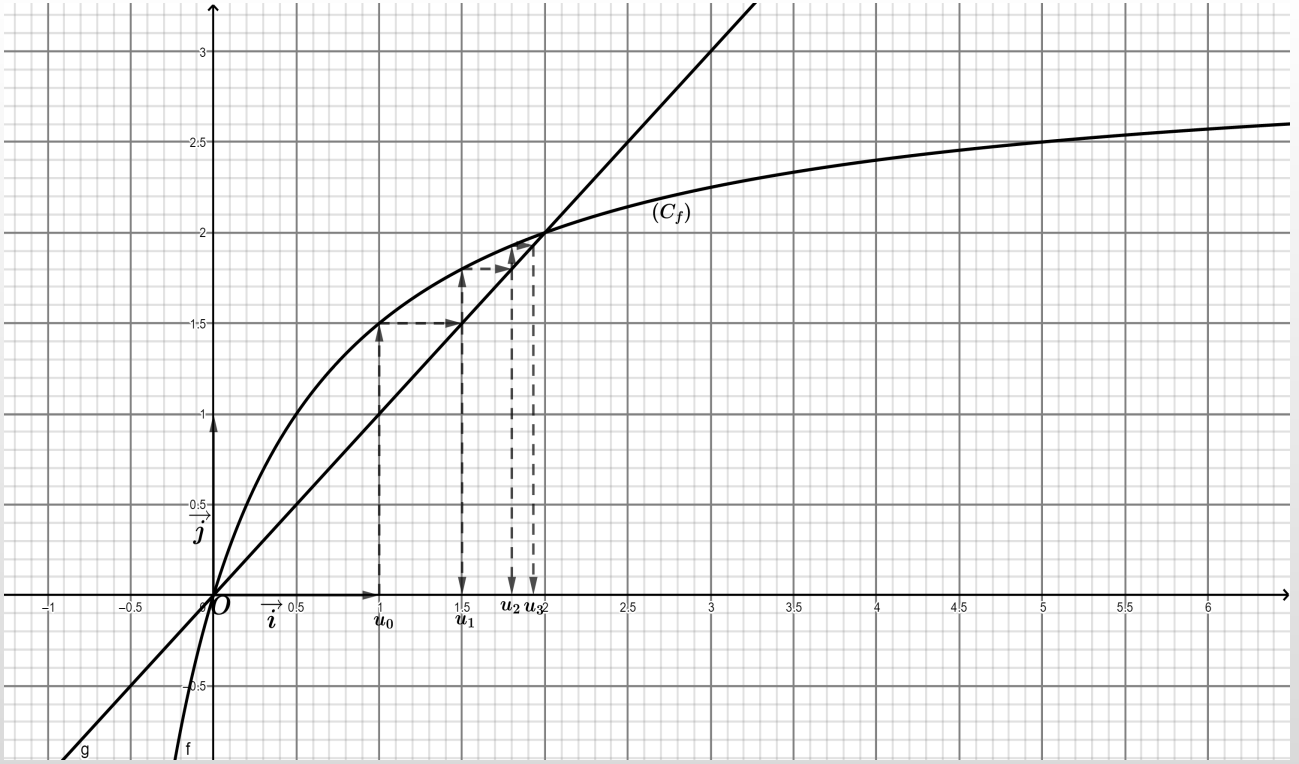
$A(e^{-1}; e - e^{-1})$.

معادلة المماس (T) : $y_T = f'(e^{-1})(x - e^{-1}) + f(e^{-1}) = -x + e^{-1} + e - e^{-1} = -x + e$

6 - إنشاء المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) :

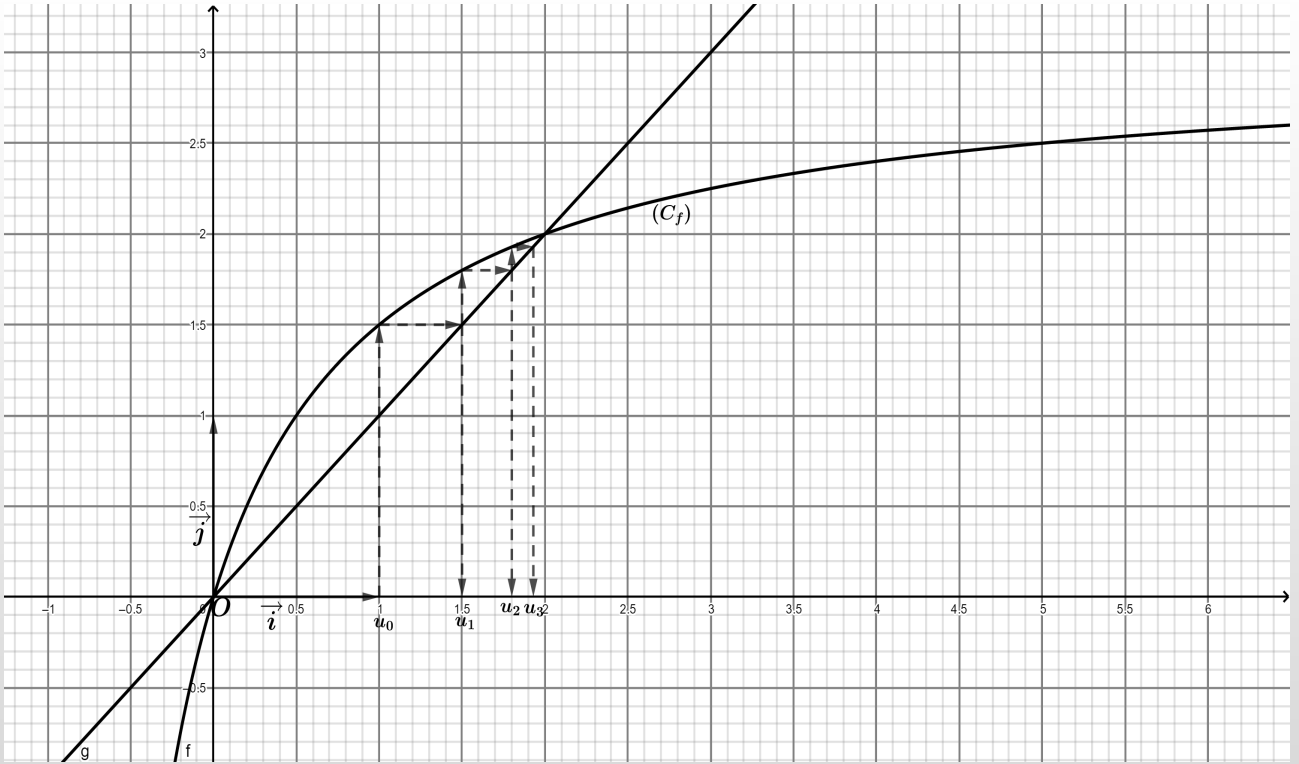


الوثيقة المرفقة



تُصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس

الوثيقة المرفقة



تُصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس