

اختبار الثلاثي الأولالتمرين الأول : (08 نقاط)

عين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير (أي إجابة دون تبرير لا تؤخذ بعين الاعتبار)

معدوم	موجب تماما	سالب تماما
0	1	2
0	1	2
$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$[0; +\infty[$

(1) العدد : $\frac{1}{2} \ln(125) + 2 \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln\sqrt{5}$ هو عدد :

(2) عدد حلول المعادلة : $e^{3x} - x - 1 = 0$ هو :

(3) عدد حلول المعادلة : $(\ln x)^2 = \ln(x^2)$ هو :

(4) حلول المتراجحة : $e^x - e^{-x} \geq 0$ هي :

(5) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ هي دالة :

زوجية	فردية	ليست زوجية وليست فردية
-------	-------	------------------------

(6) منحنى الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ يقبل نقطة انعطاف فواصلها من الشكل :

$x = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$
--	---	--

(7) الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ : $h(x) = \frac{mx^2}{x^2 - 1}$ حيث $m \in \mathbb{R}^*$ تقبل قيمة حدية محلية وحيدة من أجل :

$m \in \mathbb{R}_+^*$	$m \in \mathbb{R}^*$	$m \in \mathbb{R}_-^*$
------------------------	----------------------	------------------------

(8) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $y = y' - 1$ الذي يحقق $y(\ln 2) = 1$ هو :

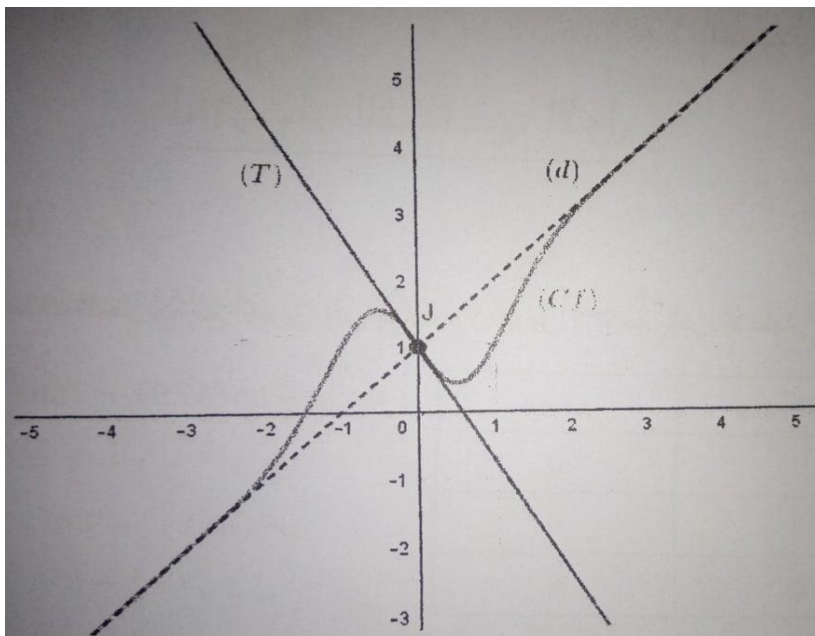
$x \mapsto e^x - 1$	$x \mapsto e^{(1-x)} - 1$	$x \mapsto e^{\frac{1}{2}(x+1)} + 1$
---------------------	---------------------------	--------------------------------------

التمرين الثاني : (12 نقطة)

(I) نعتبر الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، عبارتها هي : $f(x) = mx + p + (ax + b)e^{-x^2}$. وليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$. (انظر الشكل).

✎ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

✎ المستقيم (T) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 والذي معادلته : $y = (1 - e)x + 1$. (T) :
✎ النقطة $J(0; 1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .



(1) اكتب معادلة المستقيم (d) .

(2) علما أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (xe^{-x^2}) = 0$ ، عين قيمتي كل من m و p .

(3) احسب قيمة المجموع : $f(-x) + f(x)$ ، حيث $x \in \mathbb{R}$.

(4) باستعمال بعض المعلومات السابقة عين كلا من a و b .

(II) بوضع : $a = -e$ ، $b = 0$ و $m = p = 1$.

(1)

(أ) بين أن f' مشتقة الدالة f زوجية .

(ب) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$.

(ج) ادرس تغيرات الدالة f' وشكل جدول تغيراتها .

(د) برهن أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $0.51 < \alpha < 0.52$ ثم استنتج حصرا لـ β .

(2) عين معادلتني مماسي (C_f) ، (T_1) و (T_2) الموازيان لـ (d) .

(3)

(أ) ارسم (T_1) و (T_2) في المعلم السابق.

(ب) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$.

انتهى الموضوع

عرفن سال لاختبار التفاضل

الأول

وفيه للمعادلة حكاين

③ - عدد حلول المعادلة $\ln(x^2) = \ln(x^4)$ هو: 0, 2

التبرير: 0, 7

$$(\ln x)^2 = \ln(x)^2$$

$$(\ln x)^2 - \ln(x^2) = 0$$

$$(\ln x)^2 - 2 \ln x = 0$$

$$\ln x (\ln x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \ln 1 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

④ - حلول المعادلة: $e^x - e^{-x} = 0$ 0, 2

التبرير: 0, 7

$$e^x - e^{-x} = 0$$

$$e^x = e^{-x}$$

$$x = -x$$

$$x + x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x \in [0; +\infty[$$

⑤ - الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{2})$ 0, 2

هي دالة زوجية. 0, 7

التبرير: 0, 7

$$f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$f(-x) = 3 \sin(-2x - \frac{\pi}{2}) = 3 \sin(-(2x + \frac{\pi}{2}))$$

$$f(-x) = -3 \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 3 \sin((2x + \frac{\pi}{2}) - \pi)$$

$$f(-x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = f(x)$$

$$\sin(x - \pi) = -\sin(x)$$

ملاحظة:

⑥ - منحنى الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{2})$ 0, 2

$$x = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}$$

التبرير: 0, 7

$$g(x) = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$g'(x) = -6 \sin(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$g''(x) = -12 \cos(2x - \frac{\pi}{2}) \rightarrow g''(x) = 0$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{4} / k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{4} / k \in \mathbb{Z}$$

التمرين الأول: (08 نقاط)

تدوين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير:

① - العدد: $\frac{1}{2} \ln(125) + 2 \ln(\frac{1}{5}) + \ln \sqrt{5}$ هو: 0, 2

عدد: 0, 7

$$\frac{1}{2} \ln(125) + 2 \ln(\frac{1}{5}) + \ln \sqrt{5} = \frac{1}{2} \ln(5^3) + 2 \ln(5^{-1}) + \ln(5^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{3}{2} \ln 5 - 2 \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 5$$

$$= \frac{3}{2} \ln 5 - 2 \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 5 = 0$$

② - عدد حلول المعادلة: $e^{3x} - x - 1 = 0$ هو: 0, 2

التبرير: 0, 7

$$e^{3x} - x - 1 = 0$$

$$f(x) = e^{3x} - x - 1$$

$$f'(x) = 3e^{3x} - 1$$

من أجل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$3e^{3x} - 1 = 0$$

$$3e^{3x} = 1$$

$$e^{3x} = \frac{1}{3} \rightarrow 3x = \ln(\frac{1}{3}) \rightarrow x = -\frac{\ln 3}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\ln 3}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	≥ 0	$+\infty$

الدالة f مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $]-\infty; -\frac{\ln 3}{3}]$ و $[\frac{\ln 3}{3}; +\infty[$ 0, 2

وفيه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $f(x) = 0$ لا تملك حلاً

على المجال $]-\infty; -\frac{\ln 3}{3}]$ و $[\frac{\ln 3}{3}; +\infty[$

الدالة f مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال $]-\frac{\ln 3}{3}; +\infty[$ و $]-\infty; \frac{\ln 3}{3}]$ 0, 2

وفيه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تملك حلاً وحيداً على المجال $]-\frac{\ln 3}{3}; +\infty[$ و $]-\infty; \frac{\ln 3}{3}]$

$$f(x) - (mx + p) = (ax + b)e^{-x^2}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + p)) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (ax + b)e^{-x^2}$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (ax e^{-x^2} + b e^{-x^2})$$

$$= 0$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + p) = 0$$

أي أن المستقيم والمعادلة $y = mx + p$ هما y المنحني (cf) في مجاور $\pm\infty$ ومواضع (d)

$$(d): y = x + 1$$

$$y = mx + p$$

$$m = p = 1$$

بالطابق: حساب قيمة المتوسط: $f(x) + f(-x)$ حيث $x \in \mathbb{R}$

النقطة $J(0, 1)$ هي مركز تناظر (cf)

$$f(2(0) - x) + f(x) = 2(1)$$

$$f(-x) + f(x) = 2$$

تعيين مركز التناظر: $f(2(a) - x) + f(x) = 2p$
 $J(a, b)$ مركز تناظر (cf)

(4) - تعيين a و b :
 x لا يتأثر!

$$f(-x) + f(x) = 2$$

$$f(-x) + f(x) = -mx + p - axe^{-x^2} + be^{-x^2} + mx + p + axe^{-x^2} + be^{-x^2} = 1$$

$$f(-x) + f(x) = 2p + 2be^{-x^2} = 2 + 2be^{-x^2} \Rightarrow p = 1$$

$$2 + 2be^{-x^2} = 2$$

$$2be^{-x^2} = 0$$

$$e^{-x^2} \neq 0 \Rightarrow b = 0$$

لدينا: المعامل (T) للمنحني (cf) في النقطة J

$$(T): y = (1 - c)x + 1$$

$$f'(0) = 1 - e$$

$$f'(x) = m + a e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} (ax + b)$$

$$f'(x) = m + a e^{-x^2} - 2ax e^{-x^2} - 2bx e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 1 + a e^{-x^2} - 2ax e^{-x^2}$$

$$f'(0) = 1 + a$$

(7) - إذا كان h المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$h(x) = \frac{mx^2}{x^2 - 1} \text{ حيث } m \in \mathbb{R}^* \text{ قابل قسمة 2}$$

محليلة و سيدة من أجل: $m \in \mathbb{R}^*$

$$h(x) = \frac{mx^2}{x^2 - 1}$$

$$h'(x) = \frac{2mx(x^2 - 1) - 2x(mx^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2mx^3 - 2mx - 2mx^3}{(x^2 - 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-2mx}{(x^2 - 1)^2}$$

$$h'(x) = 0$$

إذا كان $x = 0$

(8) - الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: $y = y' - 1$

الذي يحقق $y(\ln 2) = 1$ هو: $x \mapsto e^x - 1$

$$y = y' - 1$$

$$y' = y + 1$$

$$x \mapsto C e^{x^2} - 1$$

$$C e^{\ln 2} - 1 = 1$$

$$2C = 2 \Rightarrow C = 1$$

$$x \mapsto e^x - 1$$

و من هنا: التمرين الثاني: (12 نقطة)

(I) - معادلة المستقيم (d):

النقطتان: $B(-1, 0)$ و $A(0, 1)$

تتبعان إلى للمستقيم (d).

$$(d): y = ax + b$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 + 1} = 1$$

$$1 = 1(0) + b$$

$$b = 1$$

$$(d): y = x + 1$$

(2) - تعيين قيمتي p و m :

$$f(x) = mx + p + (ax + b)e^{-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x^2 e^{-x^2+1} - e^{-x^2+1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 2 \frac{x^2}{e^{x^2}} e - \frac{e}{e^{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 2 \left(\frac{x}{e^x} \right)^2 e - \frac{e}{e^{x^2}} \right) = 1 \quad \text{O.V.}$$

$$f'(x) = 4x e^{-x^2+1} - 2x e^{-x^2+1} (2x^2 - 1)$$

$$f''(x) = 4x e^{-x^2+1} - 4x e^{-x^2+1} - 2x e^{-x^2+1}$$

$$f'''(x) = (4x - 4x^3 - 2x) e^{-x^2+1}$$

$$f''(x) = -2x(-1 + 2x^2 - 2) e^{-x^2+1}$$

$$f'''(x) = -2x(2x^2 - 3) e^{-x^2+1}$$

استخدمنا $f''(x)$ من استنتاج 1

$$f'''(x) = 0$$

$$-2x = 0 \quad \text{مما يلي: إما:}$$

$$x = 0$$

$$2x^2 - 3 = 0$$

$$2x^2 = 3$$

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$-2x$		+	+	-	-
$2x^2 - 3$		+	0	-	+
$f''(x)$		+	0	-	-
$f'(x)$					

د. - نرى هنا أن المعادلة $f''(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول:

$0, 51 < \alpha < 0, 52$ ثم استنتاج حصر α :

الدالة f' مستمرة وقرابة ما حاصل $[0, 51; 0, 52]$

و $0 < f'(0, 51) < f'(0, 52)$ وفيه حسب جبرهنة

القيم المتوسطة فإن المعادلة $f''(x) = 0$

تقبل حلاً وحيداً α حيث $0, 51 < \alpha < 0, 52$

استنتاج حصر β :

بما أن f' زوجية فإن: $\beta = -\alpha$

$$1 + a = 1 - e$$

$$\text{O.V. } a = -e$$

$$f(x) = x + 1 - e x e^{-x^2} \quad \text{(II)}$$

1/1 (1) - تبين أن f' مستمرة الدالة زوجية:

لدينا:

$$f(x) + f(-x) = 2$$

$$f'(x) + (-f'(x)) = 0$$

$$f'(x) = f'(-x)$$

ومنه $f'(x) > 0$ دالة زوجية.

$$f'(x) = 1 + a e^{-x^2} - 2a x^2 e^{-x^2} \quad (4 \text{ ن})$$

$$a = -e$$

$$f'(x) = 1 - e e^{-x^2} - 2e x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(-x) = 1 - e e^{-(-x)^2} - 2e (-x)^2 e^{-(-x)^2}$$

$$f'(-x) = 1 - e e^{-x^2} - 2e x^2 e^{-x^2} = f'(x)$$

ومنه $f'(x) > 0$ دالة زوجية.

1/2 - تبين أن f متزايدة على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 + (2x^2 - 1) e^{-x^2+1}$$

لدينا:

$$f'(x) = 1 - e e^{-x^2} - 2e x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2+1} - 2x^2 e^{-x^2+1}$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2+1} (1 + 2x^2)$$

$$f'(x) = 1 + (2x^2 - 1) e^{-x^2+1}$$

1/3 - نرى أنه تكافؤ الدالة f' مع الدالة $1 + (2x^2 - 1) e^{-x^2+1}$

$$f'(x) = 1 + 2x^2 e^{-x^2+1} - e^{-x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2x^2 e^{-x^2+1} - e^{-x^2+1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2x^2 e^{-x^2} e - e^{-x^2} e)$$

بوضع $X = -x$ ونرى: $x \rightarrow -\infty$ فإن $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x^2 e^{-x^2} e - e^{-x^2} e)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 2 \frac{x^2}{e^{x^2}} e - \frac{e}{e^{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 2 \left(\frac{x}{e^x} \right)^2 e - \frac{e}{e^{x^2}} \right) = 1 \quad \text{O.V.}$$

$$(T_2): y = 1 \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{e}$$

$$(T_2): y = x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}e}{2}$$

$$(T_2): y = x + 1 + \frac{\sqrt{2}e}{2} \quad (0.12)$$

③ - 1 - رسم (T1) و (T2) (0.11)

ن. الحل الثاني:

الحل الثاني للمعادلة $f(x) = x + m$ هي نقاط تقاطع

(0.10) مع المستقيم ذو المعادلة $y_m = x + m$

الموازاة لـ (d), (T1), و (T2) (0.12x7)

- إذا كان $m < 1 - \frac{\sqrt{2}e}{2}$ فإن للمعادلة $f(x) = x + m$ لا تقبل حلاً.

- إذا كان $m = 1 - \frac{\sqrt{2}e}{2}$ فإن للمعادلة تقبل حلاً مضاعفاً متوالياً تماماً.

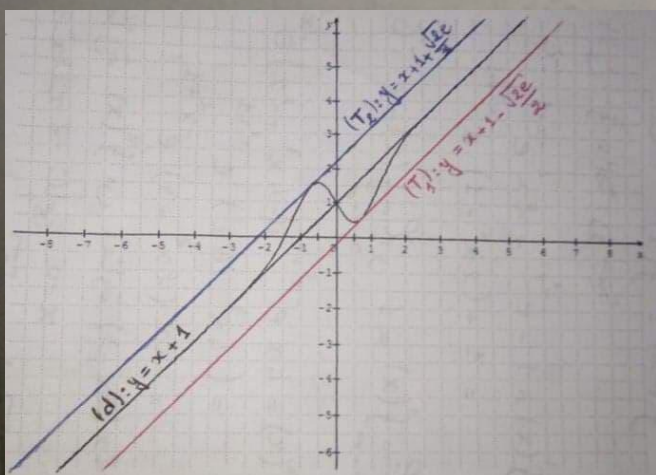
- إذا كان $1 - \frac{\sqrt{2}e}{2} < m < 1$ فإن للمعادلة تقبل حلين حقيقيين موجبين متماثلين.

- إذا كان $m = 1$ فإن للمعادلة تقبل حلاً وحيداً معدوماً.

- إذا كان $1 < m < 1 + \frac{\sqrt{2}e}{2}$ فإن للمعادلة تقبل حلين متساويين متماثلين.

- إذا كان $m = 1 + \frac{\sqrt{2}e}{2}$ فإن للمعادلة تقبل حلاً مضاعفاً متساوياً تماماً.

- إذا كان $m > 1 + \frac{\sqrt{2}e}{2}$ فإن للمعادلة لا تقبل حلاً.



② - تعيين معادلتها من (T2), (T1), و (0.13) الموازية لـ (d).

$$(d): y = x + 1$$

نحل المعادلة:

$$f'(x) = 1$$

$$1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2 + 1} = 1$$

$$(2x^2 - 1)e^{-x^2 + 1} = 0$$

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ أو } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$(0.14) \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أو } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(T1): y = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1\right)e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \left(\frac{2 \times 2}{4} - 1\right)e^{-\frac{2}{4} + 1} = 1$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - e \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{2}{4} + 1}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{2}{4} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}}$$

$$(T1): y = 1 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{e}$$

$$(T1): y = x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}e}{2}$$

$$(T1): y = x + 1 - \frac{\sqrt{2}e}{2} \quad (0.15)$$

$$(T2): y = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + e \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{2}{4} + 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}}$$