

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

### الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على (04) صفحات (من الصفحة 1 من 7 إلى الصفحة 4 من 7)

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية  $(U_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بالعلاقة:  $U_0 = 2$  و  $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1$

(1) أحسب الحدود  $U_1; U_2; U_3$  ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n: U_n \leq n + 3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$  و استنتج أنها محدودة من الأسفل

ج) هل يمكن القول أن المتتالية  $(U_n)$  متقاربة ؟

(3) نعتبر المتتالية  $(V_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بالعلاقة:  $V_n = U_n - n$

أ) برهن أن المتتالية  $(V_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) عبر عن  $V_n$  ثم  $U_n$  بدلالة  $n$  ثم احسب نهاية المتتالية  $(U_n)$

ج) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

(4) لتكن المتتالية  $(t_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بالعلاقة:  $t_n = \ln(V_n)$

أ) برهن أن المتتالية  $(t_n)$  حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $T_n$  حيث:  $T_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$

• استنتج بدلالة  $n$  الجداء  $P_n$  حيث:  $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

## التمرين الثاني: (5.5 نقاط)

I. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  كثير الحدود  $P(Z)$  للمتغير المركب  $Z$  حيث:

$$P(Z) = Z^3 - (1 + \sqrt{2}i)Z^2 + (1 + \sqrt{2}i)Z - \sqrt{2}i$$

(1) بين أن المعادلة  $P(Z) = 0$  تقبل حلا تخيلا صرفا  $Z_0$  يطلب تعيينه.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط  $D; C; B; A$  التي لواحقتها على

الترتيب:  $Z_A = 1 + i$  و  $Z_B = -1 + 3i$  و  $Z_C = -3 + i$  و  $Z_D = -1 + \sqrt{3}i$

(1) أ) أنشئ في المعلم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  النقط  $D; C; B; A$  مع شرح كيفية إنشاء النقطة  $D$

ب)  $h$  هو التحاكي الذي نسبته 2 و يحول  $A$  إلى  $C$ . عين  $Z_w$  لاحقة النقطة  $w$  مركز التحاكي  $h$

$$(2) \text{ نضع } L = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$$

أ) احسب طولية وعمدة العدد المركب  $L$  مستنتجا طبيعة المثلث  $CBA$

ب) عين مجموعة الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث يكون:  $L^n$  تخيلا صرفا

(3) لتكن النقطة  $G$  بحيث:  $\vec{GC} = \vec{AB}$  و لتكن  $I$  منتصف القطعة:  $[BC]$

أ) بين أن النقطة  $G$  هي مرجح النقط  $C; B; A$  مرفقة بمعاملات حقيقية يطلب تعيينها.

ب) عين  $Z_G$  لاحقة النقطة  $G$  و  $Z_I$  لاحقة النقطة  $I$

$$(ج) \text{ عين ثم أنشئ مجموعة النقط } \mathcal{M} \text{ من المستوي بحيث: } \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

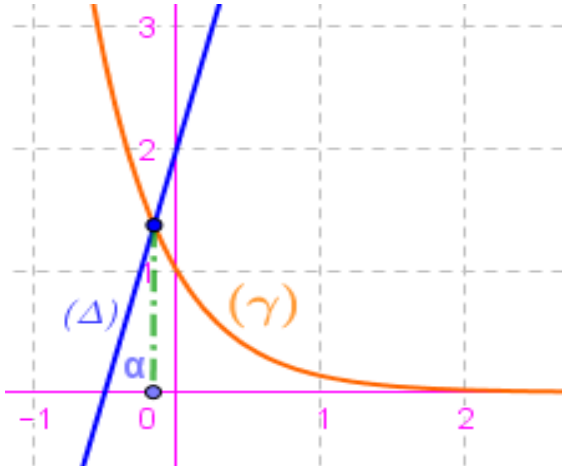
(4) نعتبر النقطة  $E$  ذات اللاحقة  $Z_E = 1 + 5i$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $\mathcal{S}$  والذي يحول  $G$  إلى  $I$  و يحول  $E$  إلى  $A$

ب) ما هي صورة الدائرة  $(\mathcal{R})$  التي مركزها  $G$  و تشمل  $E$  بالتشابه المباشر  $\mathcal{S}$  ؟

ج) عين طبيعة التحويل النقطي  $\mathcal{S} \circ \mathcal{S}$  و عناصره المميزة.

## التمرين الثالث: (06 نقاط)



I.  $(\gamma)$  التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto e^{-2x}$  و  $(\Delta)$  المستقيم ذو المعادلة

$y = 4x + 2$ .  $\alpha$  هي فاصلة نقطة تقاطع  $(\gamma)$  و  $(\Delta)$ .

لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$

1) بقراءة بيانية حدد وضعية  $(\gamma)$  بالنسبة لـ:  $(\Delta)$  على  $\mathbb{R}$

2) بين أن:  $g(x) \geq 0$  من أجل:  $x \in ]-\infty; \alpha]$  و أن:  $g(x) < 0$  من أجل:  $x \in ]\alpha; +\infty[$

3) تحقق أن:  $-0.16 < \alpha < -0.15$

II. لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$ . و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الطول  $2cm$

1) أ) أحسب نهايات الدالة  $f$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن:  $f'(x) = e^{2x} g(x)$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

2) أ) بين أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا  $(D)$  يطلب تعيين معادلة له.

ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحني  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$

3) بين أن:  $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2\alpha + 1}$

4) أثبت أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  موازيا للمستقيم  $(D)$  يطلب كتابة معادلة له

5) أ) أرسم  $(D)$  و  $(T)$  و  $(C_f)$  ( نأخذ  $f(\alpha) \simeq 3.07$  )

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي  $m$  بحيث تقبل المعادلة:  $f(x) = x + m$  حلين متمايزين.

6) أ)  $x$  عدد حقيقي. باستعمال التكامل بالتجزئة جد التكامل:  $\int_0^x 2te^{2t} dt$

ب)  $\lambda$  عدد حقيقي أصغر تماما من 0. أحسب بدلالة  $\lambda$  المساحة  $A(\lambda)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  و

المستقيمات ذات المعادلات:  $x = 0$  و  $x = \lambda$  و  $y = x + 3$  ثم أحسب:  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$

## التمرين الرابع: (3.5 نقاط)

(1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  باقي القسمة الإقليدية للعدد  $3^n$  على 10

• استنتج باقي قسمة العدد  $A_n$  على 10 حيث:

$$A_n = 1993^{16n+6} - 2 \times 1439^{2n+3} + 2018$$

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $(3n + 4)1439^n + 2017^{2n+1} \equiv (3n + 1)3^{2n} [10]$

ب) استنتج قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها:  $(3n + 4)1439^n + 2017^{2n+1}$  مضاعفا لـ 10

(3)  $N$  عدد طبيعي يكتب  $\alpha\alpha0\alpha\alpha02$  في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب  $\beta612$  في النظام ذي الأساس 7

• أوجد العددين  $\alpha$  و  $\beta$  ثم اكتب  $N$  في النظام العشري.

(4) يحتوي كيس على 4 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس مرقمة ببواقي قسمة  $3^n$  على 10. نسحب عشوائيا من الكيس كرتين في آن واحد.

أ) أحسب احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي مجموع أرقام العدد 2017

ب)  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بعملية السحب مجموع الرقمين الظاهرين على الكرتين.

• عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ثم احسب أمله الرياضي.

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على (03) صفحات (من الصفحة 5 من 7 إلى الصفحة 7 من 7)

التمرين الأول: (4.5 نقاط)

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $[0; 2]$  بـ:  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ . المنحني  $(C_f)$  في الوثيقة المرفقة هو التمثيل البياني للدالة  $f$  في المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  معرفتان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

• باستعمال  $(C_f)$  و منتصف الربع الأول مثل على محور الفواصل الثلاث حدود الأولى لكل متتالية مبرزا خطوط الإنشاء

2) أ) بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 2$  و  $u_n \leq u_{n+1}$

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq v_n \leq 2$  و  $v_{n+1} \leq v_n$

د) ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  ؟ علل.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_{n+1})(u_{n+1})}$

• استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n - u_n \geq 0$

• استنتج أن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان متجاورتان يطلب تعيين نهاية كل منهما.

التمرين الثاني: (6.5 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:  $(Z^2 + 3 - 4i)(Z^2 - 2(\sqrt{3} + 1)Z + 2\sqrt{3} + 5) = 0$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي لواحقتها على

الترتيب:  $Z_A = 1$  و  $Z_B = 1 + 2i$  و  $Z_C = 1 + \sqrt{3} + i$  و  $Z_D = \overline{Z_C}$

1) أ) أكتب  $Z_C - Z_B$  على الشكل الاسي ثم اشرح طريقة إنشاء  $C$  و  $D$

ب) أنشئ النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$

2) أحسب  $(Z_C - Z_B)^{2015}$  ( تعطى النتيجة على الشكل الجبري )

3) أ) أحسب قياسا للزاوية  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$

• استنتج طبيعة التحويل  $f$  الذي مركزه  $A$  و يحقق  $f(B) = C$  ثم عين عبارته المركبة و عناصره المميزة

4) أثبت أن الرباعي  $ABCD$  هو معين يطلب تعيين مساحته

5) لتكن  $Z_K$  لاحقة النقطة  $K$  صورة النقطة  $E(0; 1)$  بواسطة التحويل  $f$

أ) بين أن  $Z_K = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{12}} + 1$  ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ:  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

6) اكتب العبارة المركبة للتحاكي  $h$  الذي مركزه  $A$  و نسبته  $-3$  ثم عين صورة النقطة  $E$  بالتحاكي  $h$

7) أ) عين طبيعة للتحويل  $f \circ h$  و عناصره المميزة ثم اكتب عبارته المركبة.

ب) أحسب مساحة المعين  $A'B'C'D'$  صورة المعين  $ABCD$  بواسطة التحويل  $S$

### التمرين الثالث: (03 نقاط)

I. يحتوي كيس  $U_1$  على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس منها 4 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء و كرتين حمراوين.

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من الكيس  $U_1$

1) أحسب احتمال الحادثتين:  $E$  "الكرات المحصل عليهما من نفس اللون".  $F$  "توجد على الأقل كرة حمراء".

2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بعملية السحب العدد  $2n - 1$  حيث  $n$  هو عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس

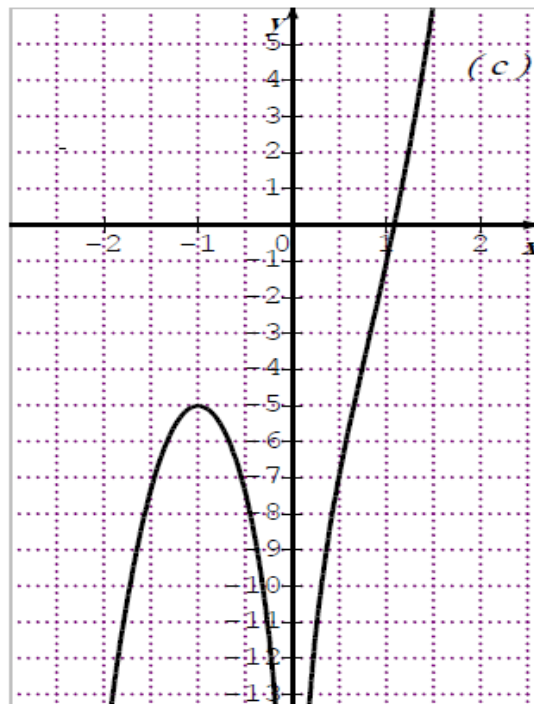
أ) بين أن قيم المتغير العشوائي  $X$  هي:  $\{1; 3; 5; 7\}$

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ثم احسب أمله الرياضي.

II. يحتوي كيس  $U_2$  على 10 كريات لا نفرق بينها باللمس منها 7 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء.

نسحب عشوائيا كرية من الكيس  $U_2$  ثم نضعها في الكيس  $U_1$ . ثم نسحب كرية من الكيس  $U_1$

1) أحسب احتمال الحادثتين:  $A$  "الكرية المسحوبة من  $U_1$  حمراء".  $B$  "الكرية المسحوبة من  $U_1$  بيضاء".



## التمرين الرابع: (06 نقاط)

I. المنحني المقابل هو التمثيل البياني للدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$

$$g(x) = 2x^3 - 3 + 6 \ln|x| \quad \text{ب:}$$

(1) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة  $g$

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  يحقق:

$$1.07 < \alpha < 1.09 \quad \text{ثم استنتج إشارة } g(x) \text{ على } \mathbb{R}^*$$

II. نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  ب:  $f(x) = 2x - 3 \frac{\ln|x|}{x}$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  حيث:  $\|\vec{i}\| = 2cm$  و  $\|\vec{j}\| = 2cm$

(1) أحسب نهايات الدالة  $f$  ثم فسر بيانيا نهاية الدالة  $f$  عند الصفر

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$ :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$

• استنتج إشارة  $f'(x)$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

ب) بين أن  $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$  ثم استنتج حصرا ل:  $f(\alpha)$

(3) أ) بين أن المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة:  $y = 2x$  مقارب مائل للمنحني  $(C_f)$

ب) أدرس وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(D)$

(4) أنشئ في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  المستقيم  $(D)$  والمنحني  $(C_f)$

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة:  $mx^2 + 3 \ln x = 0$

(6) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:  $h(x) = \frac{a+b \ln|x|}{x}$

أ) عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  حتى تكون  $h$  دالة أصلية للدالة:  $x \mapsto \frac{\ln|x|}{x}$  على  $\mathbb{R}^*$

ب) عين دالة أصلية للدالة  $f$  على:  $\mathbb{R}^*$

ج) أحسب  $\int_{\alpha}^2 f(x) dx$  ثم فسر النتيجة بيانيا.

انتهى الموضوع الثاني