

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

تمرين 01 : (03.5 نقاط) نعتبر المتتالية (Z_n) للأعداد المركبة المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نضع M_n النقطة ذات اللاحقة z_n . نعتبر العدد المركب $z_A = 4 + 2i$ و النقطة A ذات اللاحقة z_A

1) لتكن (U_n) المتتالية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = z_n - z_A$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، النقط M_n و M_{n+4} ، A على إستقامة

التمرين 02 : (04.5 نقاط) الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر مجموعتي النقط (E) و (F) المعرفتين كالتالي:

$$(E) = \{M(x, y, z) / (x + y + z + 1)^2 + (x - y + 2)^2 = 0\}$$

$$(F) = \{M(x, y, z) / (x + y + z + 1)^2 - (x - y + 2)^2 = 0\}$$

1. بين أن (E) هي مستقيم يطلب تعيين شعاع توجيه له
2. بين أن (F) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2) يطلب إعطاء معادلتيهما ثم تحقق أن

$$(P_1) \cap (P_2) = (E)$$

3. نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي (P_m) المعروف بالمعادلة الديكارتية :

$$(P_m): (1+m)x + (m-3)y + (m-1)z + m - 3 = 0$$

أ. تحقق أن (P_m) يحوي (E)

ب. هل كل مستوي يحوي (E) هو المستوي (P_m) ؟ برر

التمرين 03 (05 نقاط) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ حيث : $4x - 9y = 5$

(1) أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x \equiv 8[9]$ ، ثم إستنتج حلول المعادلة (E)

ب) α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي أساسه x و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي أساسه y حيث : $x \leq 35$ و $y \leq 15$

❖ عين القيم الممكنة لـ x و y ثم أكتب α في النظام العشري

(2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 4^n على 9

ب) عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (E) حيث : $2011^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$

(3) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث : $a = 9n + 8$ و $b = 4n + 3$ و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر حيث n عدد طبيعي

أ) ما هي القيم الممكنة لـ d

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d = 5$

(4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A = 9n^2 + 17n + 8$ و $B = 4n^2 + 7n + 3$

أ) بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كلا من A و B

ب) إستنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين الرابع (07 نقاط) الجزء I ليكن k عدد حقيقي موجب تماما

(1) الدالة g_k معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g_k(x) = 1 + (1 + k(x+1))e^{kx+k}$

أ) أحسب الدالة المشتقة g'_k ثم إستنتج إشارة $g'_k(x)$ من أجل x من $\mathbb{R}$
 ب) شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم إستنتج أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $g_k(x) > 0$ (لاحظ أن من أجل x من $\mathbb{R}$: $e^x > x$)

(2) الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = x + (x + 1)e^{kx+k}$

(C_k) منحنى دالة f_k في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❖ بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثياتها

❖ بين أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $f'_k(x) = g_k(x)$

الجزء II : بوضع $k = 1$:

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$

ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_1) بجوار $-\infty$

ج) أدرس إتجاه تغير الدالة f_1 على $\mathbb{R}$ و إستنتج جدول تغيراتها

د) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_1) عند النقطة التي فاصلتها -1

(4) بين أن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 \leq \alpha \leq 0$

(5) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f_1(x-1) + f_{-1}(-x-1) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_1) و (C_{-1}) ؟

ب) أرسم المنحنى (C_1) . و إستنتج على نفس المعلم المنحنى (C_{-1})

الجزء III : λ عدد حقيقي أقل تماما من 1 . نعتبر التكامل التالي : $I_k = \int_{\lambda-1}^{-1} -(x+1)e^{kx+k} dx$

(1) هل العدد I_k يمثل مساحة ؟ برر

(2) بإستعمال التكامل بالتجزئة ، أحسب I_1 ثم إستنتج $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I_1$. فسر هذه النتيجة

إنتهى الموضوع الأول .

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعرفة بـ : $2019x - 2018y = 1 - \lambda$ بحيث $\lambda \in \mathbb{Z}$

(أ) عين قيم λ التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حولا في $\mathbb{Z}^2$

(ب) بين ان الثنائية $(1 - \lambda; 1 - \lambda)$ حل خاص للمعادلة (E)

(ت) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

(ث) نعتبر في $\mathbb{Z}$ جملة المعادلتين : $(S) : \begin{cases} a \equiv 1[2018] \\ a \equiv \lambda[2019] \end{cases}$ بحيث $a \in \mathbb{Z}$

❖ إستنتج حل جملة المعادلتين (S)

(5) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 2^n على 7

(ب) إستنتج باقي قسمة العدد $1440 + 2018^{2019}$ على 7

(ج) بوضع $\lambda = 0$: عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حلول المعادلة (E) وتحقق $2^{y-x} \equiv 4[7]$

التمرين الثاني : (04 نقاط) ليكن n عدد طبيعي بحيث : $n \geq 4$

1) يحتوي صندوق U على n كرة لا يمكن التمييز بينها عند اللمس منها 3 حمراء و البقية سوداء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين

❖ أحسب إحتمال كل حادثة من الحادثتين التاليتين :

A : سحب كرتين من نفس اللون

B : سحب كرة حمراء على الأكثر

2) نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ U_k لصندوق k ($1 \leq k \leq 3$) الذي يحتوي على k كرة حمراء و $n - k$ كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوق من 3 صناديق و نسحب في آن واحد كرتين .

ليكن X المتغير العشوائي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء.

❖ عين مجموعة قيم X

❖ أثبت أن : $P(X = 1) = \frac{4(3n - 7)}{3n(n - 1)}$ و $P(X = 2) = \frac{8}{3n(n - 1)}$

❖ عين قانون الإحتمال لـ X

التمرين الثالث : (04.5 نقاط) حل في $\mathbb{C}$ جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = 4i \\ z_1 + 3z_2 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب $\sqrt{3} + 3i$ و $\sqrt{3} - i$

1. أكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسّي .

2. إستنتج قيم n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ عدد تخيلي صرف .

3. S التحويل النقطي الذي مركزه O ويحول A إلى B

♣ أوجد الكتابة المركبة للتشابه S ثم عين العناصر المميزة له

4. نعرف متتالية النقط A_n التي لاحقتها Z_n من المستوي المركب كمايلي : $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ) أنشئ في المستوي المركب . النقط A_2, A_1, A_0

ب) برهن أن : $Z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$

4. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي : $\begin{cases} U_0 = A_0 A_1 \\ U_n = A_n A_{n+1} \end{cases}$

أ/ بين أن المتتالية (U_n) هندسية يطلب تحديد أساسها q و حدها الأول U_0

ب/ إستنتج عبارة U_n بدلالة n

ج. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين 04 : (06.5 نقاط) الجزء I : الدالة g معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$

(1) أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0, +\infty[$

(2) برر وجود عدد حقيقي α حيث $g(\alpha) = 0$. ثم جد قيمة مقربة لـ α مدور إلى 10^{-3}

الجزء II : الدالة f معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (بحيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$

(3) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب) شكل جدول تغيرات دالة f
(4) أرسم (Δ) و (C_f)

الجزء III ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . و ليكن I_n الحيز من المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين ذو المعادلتين : $x = n$ و $x = 1$

(1) برر أن هذه المساحة معطاة بـ : $I_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$

(2) أ) تأكد أن الدالة : $F : x \rightarrow -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0, +\infty[$

ب) إستنتج عبارة I_n بدلالة n

(3) أحسب نهاية المساحة I_n لما n تؤول الى $+\infty$

إنتهى الموضوع الثاني