

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين: الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 + 4z \cos \theta + 4 = 0$ (E_θ) حيث: $\theta \in]0, \pi[$.

1) أثبت أنه إذا كان α حل للمعادلة (E_θ) فإن $\bar{\alpha}$ هو كذلك حلالها.

2) نضع: $z_1 = -2 \cos \theta + 2i \sin \theta$ و $z_2 = -2 \cos \theta - 2i \sin \theta$.

أ- تحقق أن z_1 و z_2 هما حلين للمعادلة (E_θ).

ب- أكتب z_1 , z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.

ج- استنتج قيمة θ التي من أجلها يكون $OM_1 M_2$ مثلثا قائما في O حيث M_1 و M_2 نقطتان من المستوي لواحتهما z_1 و z_2 على الترتيب

3) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z لما θ تلمس المجال $[-\pi; \pi]$ و k يلمس المجال $[0; 2]$ حيث: $z = ke^{i\theta} + 3$.

4) نعتبر $\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ والنقط A, B, C لواحتهما على الترتيب z_1, z_2 و 2

أ- تحقق أن $\frac{z_2 - 2}{z_1 - 2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- عيّن مركز ونصف قطر الدائرة (Φ) المحيطة بالمثلث ABC .

5) نعتبر التحويل النقطي S في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = iz + 3$.

أ- عيّن طبيعة التحويل S وعناصره المميزة.

ب- عيّن (Φ') صورة الدائرة (Φ) بالتحويل S ماذا تستنتج؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

إناء U_1 و U_2 يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و كرتان سوداوان

و U_2 يحتوي على كرتان بيضاوان و ثلاث كرات سوداء.

نسحب كرتان دفعة واحدة من كل منهما

(علما أن الكرات متجانسة في اللمس) فنحصل بذلك على أربع كرات.

1. نهتم بعدد الكرات البيضاء المسحوبة من الإناء U_1 و عدد الكرات البيضاء المسحوبة من الإناء U_2

• بين أن احتمال سحب كرتين بيضاوين من الإناء U_1 هو $p_2 = 0,3$ و من الإناء U_2 هو $p'_2 = 0,1$.

• شكل الشجرة المثقلة المناسبة.

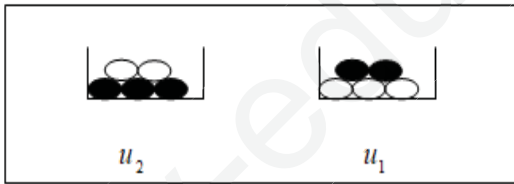
• برهن أن احتمال العادّة E "ضمن الكرات المسحوبة يوجد بالضبط كرتان بيضاوان" هو: $0,46$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المحصل عليها.

أ- حدد قانون الاحتمال لـ X .

ب- اللاعب يدفع $2,50DA$ قبل إجراء السحب. و يكسب $1DA$ لكل كرة بيضاء مسحوبة. هل اللعبة مريحة له؟

3. احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء فقط من الإناء U_2 علما أنه حصل على كرتين بيضاوين.



التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بـ: $U_0 = 0$ ، $U_1 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

1. احسب U_2 و U_3 .

2. برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $U_{n+1} = 4U_n + 1$.

- تحقق أن: U_n عدد طبيعي، ثم استنتج أن: U_n و U_{n+1} أوليان بينهما.

3. (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n + \frac{1}{3}$.

- بين أن المتتالية (V_n) هندسية، عين أساسها وحدها الأول، ثم اكتب V_n و U_n بدلالة n .

4. أ) احسب $PGCD((4^6 - 1), (4^5 - 1))$ ،

ب) عين من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD((4^{n+1} - 1), (4^n - 1))$

5. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{3n}$.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n حيث العدد $9S_n + 4^n$ يقبل القسمة على 7.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الفرع الأول :

1] نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_n(x) = n(x+1) + e^x$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم

أ. ادرس تغيرات الدالة g_n وأكتب جدول تغيراتها .

ب. برهن أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α_n ثم تحقق أن $-2 < \alpha_n < -1$

ج. استنتج حسب قيم x إشارة $g_n(x)$

2] نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f_n(x) = \frac{x e^x}{n + e^x}$ ونسمي (C_n) منحنىها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم

المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ. احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - x]$ وفسر النتائج بيانيا

ب. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $f'_n(x) = \frac{e^x \cdot g_n(n)}{(n + e^x)^2}$

ج. بين أن: $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$ ثم أكتب جدول تغيرات الدالة f_n

3] أدرس وضعية المنحنى (C_n) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$

ب. ادرس وضعية المنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) ثم أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2)

الفرع الثاني :

نعتبر التكاملين: $I = \int_{-1}^0 x e^x dx$ و $U_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$

1] احسب: I ثم برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1, 0]$: $\frac{x e^x}{n} \leq \frac{x e^x}{n + e^x} \leq \frac{x e^x}{n + 1}$

2] بين أن المتتالية (U_n) متقاربة و حدد نهايتها

3] نضع: $V_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$

ب. استنتج أن: $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2$

ج. برهن إذن أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = -\infty$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: (E) $2019x - 1440y = 3177$
 1) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $673x - 480y = 1059$
 2) أجد حلاً خاصاً (x_0, y_0) للمعادلة (E) حيث: $x_0^2 + 480y_0 = 969$ مع $x_0 \geq 0$.
 بـ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

3) عين قيم العدد الصحيح λ التي تحقق الجملة (S) حيث $(S) \dots \begin{cases} \lambda \equiv -59 [673] \\ \lambda \equiv 1000 [480] \end{cases}$.

- II. 1. أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n و 5^n على 7 .
 بـ استنتج باقي القسمة للعدد: $2020^{2019} + 1440^{1439} - 2019^{2018}$ على 7 .
 جـ عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $3 \times 2019^n - 2 \times 1440^n + 2020^{2019} \equiv 0 [7]$
 2. $N = \underbrace{1 \dots 110}_{2018 \text{ fois}}$ كما يلي: N عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 5 كما يلي:
 - بين أن العدد الطبيعي $N - 5$ مضاعف للعدد 7 .

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z) = z^3 - 7z^2 + 25z - 39$
 1) أـ عين العددين الحقيقيين α و β حيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta)$
 بـ جد في $\mathbb{C}$ مجموعة حلول المعادلة: $P(z) = 0$
 2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. نعتبر النقط A, B, C و D ذات اللوح: $z_A = i$ ، $z_D = -1 - 2i$ و $z_C = 2 - 3i$ ، $z_B = 3$
 - احسب العدد $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC
 3) ليكن التحويل النقطي S الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = (1 - i)z + b$
 أـ عين العدد المركب b حتى تكون النقطة A مركز التحويل النقطي S
 بـ ما طبيعة التحويل S ؟ مبينا عناصره المميزة.
 جـ استنتج طبيعة التحويل $S \circ S$ مع ذكر عناصره المميزة.
 4) ليكن $z_0 = 1 + i$ لاحقة النقطة A_0 و z_n لاحقة A_n ومن أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = S(A_n)$
 5) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = (1 - i)^n + i$
 بـ نعرف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = |z_{n+1} - z_n|$ - جد عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم
 استنتج أنها هندسية أساسها $\sqrt{2}$ ، ثم احسب الطول: $L = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{19}A_{20}$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

- نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(3, 2, 1)$ و $B(4, 3, 2)$ و $C(3, 1, -1)$ و $E(-1, 3, 1)$
 و نعتبر المستقيم (Δ) الموجه بالشعاع $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ و يشمل النقطة E
 1) بين أن المستقيمين (Δ) و (AB) غير متوازيين
 2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) و استنتج أن النقط A, B, C ليست في إستقامية
 3) أـ برهن أن المعادلة الديكارتيّة للمستوي (ABC) هي: $x - 2y + z = 0$
 بـ استنتج أن المستقيم (Δ) غير محتوي في المستوي (ABC)

ج- نعتبر النقطة $M_t \left(\frac{1}{2}, \sin t \times \cos t, 0 \right)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ جد قيم العدد الحقيقي t بحيث يكون $M_t \in (ABC)$

(4) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) واستنتج إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC)

ب- استنتج أن (Δ) و (AB) ليسا من نفس المستوي

(5) نعتبر (P_m) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق : $(m-1)x + (2m-6)y + (3-m)z + m-2 = 0$

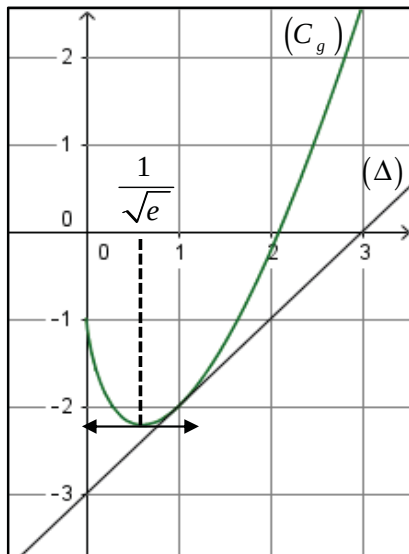
أ- برهن أنه لأجل كل عدد حقيقي m المجموعة (P_m) هي مستوي، ثم برهن أن المستوي (ABC) ينتمي إلى المستويات (P_m)

ب- برهن أن المستويات (P_m) تشمل مستقيما ثابتا (D) يطلب تعيين نقطة منه وشعاع توجيهه

التمرين الرابع : (07 نقاط)

أ- الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x \ln x - x - 1$.

المنحنى (C_g) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



المنحنى (C_g) يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{\sqrt{e}}$

و (Δ) هو المماس لـ (C_g) في النقطة التي فاصلتها $x = 1$.

1- بقراءة بيانية: أ- حدد $g'(1)$; $g(1)$; $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ثم عين معادلة للمماس (Δ) .

ب- شكل جدول تغيرات الدالة g .

2- أ- علل وجود عدد حقيقي α حيث $2 < \alpha < 2,1$ و يحقق $g(\alpha) = 0$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II- الدالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \begin{cases} x^2(\ln x - 1) - x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- أ- بين أن الدالة f مستمرة عند الصفر من اليمين.

ب- بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1$ ، ماذا يمكن أن تستنتج؟

ج- أكتب معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O من اليمين.

2- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $f'(x) = g(x)$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن: $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2}\right)$ ، ثم استنتج حصره $f(\alpha)$.

4- ليكن (D) المماس الذي معادلته $y = -x$.

أ- ادرس الوضعية النسبية بين (C_f) و (D) . ب- انشئ (D) و (C_f) . نأخذ $f(3,55) \approx 0$.

5- دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $F(x) = \frac{x^3}{9}(3 \ln x - 4)$.

أ- احسب $F'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto f(x) + x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- A هي مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

أ- بين أن: $A = \frac{e^3 - 4}{9}$ بعد تمثيلها على الرسم. (يرمز $u.a$ إلى وحدة المساحة).

انتهى الموضوع الثاني

©استاذ المادة يتمنى لكم النجاح في شهادة البكالوريا