

على الممتحن أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) p عدد طبيعي غير معدوم ، n عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 1 .
 a و b عددين طبيعيين حيث : $a = pn$ و $b = p(n-1)$.
 • بيّن أن : $PGCD(a; b) = a - b$.

- (2) بيّن أنّه إذا كان a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث : $PGCD(a; b) = a - b$ فإنّه يوجد عددين طبيعيين n و p يحققان : $a = pn$ و $b = p(n-1)$.

- (3) x و y عددين طبيعيين غير معدومين .
 نضع : $a = 40x(3y + 2)$ ، $b = 15x(8y + 5)$ ، $c = 24x(5y + 3)$.
 • عيّن $PGCD(a; b)$ و $PGCD(b; c)$ ثم استنتج $PGCD(a; b; c)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- يحتوي كيس على 5 كريات بيضاء و 5 كريات سوداء متماثلة لا نفرق بينها باللمس .
 نسحب من الكيس n كرية على التوالي مع الإرجاع حيث n عدد طبيعي ($n \geq 2$) .
 نعتبر الحوادث A : " نتحصل على كريات من اللونين " B : " نتحصل على كرية بيضاء على الأكثر " C : " نتحصل على كريات من نفس اللون " D : " نتحصل على كرية بيضاء واحدة فقط "

- (1) أ) أحسب إحتمال الحادثتين C و D .
 ب) بيّن أن : $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ، $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$ و $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$.
 (2) بيّن أن : $[P(A \cap B) = P(A) \times P(B)]$ يكافئ $[2^{n-1} = n + 1]$.
 (3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ المعرفة بـ : من أجل $n \geq 2$ يكون $u_n = 2^{n-1} - (n + 1)$.
 أ) أحسب كل من : u_2 ، u_3 و u_4 .
 ب) بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ متزايدة تماما .
 (4) إستنتج قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون الحادثتان A و B مستقلتان .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- (1) S تحويل نقطي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ بحيث : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + (1 + \sqrt{3})i$.
- أ) عيّن صورة النقطة Ω ذات اللاحقة i بالتحويل S . ماذا تستنتج ؟
- ب) ما طبيعة التحويل S ؟ عيّن عناصره المميزة .
- (2) نعرّف متتالية النقط (A_n) المعرفة بـ :
$$\begin{cases} A_0 \left(z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + i \frac{3}{4} \right) \\ A_{n+1} = S(A_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 نرسم إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .
- أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإنّ : $z_n - i = 2^n e^{i \left(\frac{7n\pi}{6} \right)} (z_0 - i)$.
- ب) إستنتج أنّه يوجد تشابه مباشر مركزه Ω و يحول A_0 إلى A_n يطلب تعيين نسبته و زاوية له .
- ج) عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط : Ω ، A_0 و A_n على استقامة واحدة .
- (3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = \Omega A_0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \Omega A_n$.
- أ) برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .
- ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_3 + u_6 + \dots + u_{3n}$ ثمّ أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
- $$f(x) = \begin{cases} (1-x)e^x & ; \quad x < 1 \\ (x-1) + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$
- (1) (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الوحدة $1cm$.
- أ) نقبل باستمرارية الدالة f عند $x_0 = 1$.
- أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار x_0 .
- ب) بيّن أنّ : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$ ، ماذا تستنتج ؟ فسّر النتائج هندسياً .
- (2) أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- أ) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .
- ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها .
- ج) أنشئ المنحني (C_f) بدقة .
- (4) ناقش بيانها و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = m(x-1)$.

(II) نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $y' - y = (-2x + 1)e^x$ و لتكن الدالة g حل لها .

(1) أ) يبين أن كل دالة φ من الشكل : $\varphi(x) = e^{-x} g(x)$ تحقق $\varphi'(x) = -2x + 1$ على $\mathbb{R}$.

ب) إستنتج حلا للمعادلة (E) الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x = 0$.

(2) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة بـ : $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_n و فسر هندسيا .

ب) أوجد علاقة تراجعية تربط بين I_n و I_{n+1} .

ج) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$: $I_n = e - 1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$.

(3) يبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$ ثم استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على 03 صفحات (من الصفحة 4 إلى الصفحة 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

- ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
- نعتبر النقطتين : $A\left(\frac{2}{3}; -3; 2\right)$ و $B\left(-\frac{4}{3}; 0; -4\right)$ و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$. (S) سطح الكرة التي قطرها $[AB]$
- (1) أ) أحسب إحداثيات النقطة E مرجح النقطتين المتقلبتين $(A; 2)$ و $(B; 1)$.
ب) أثبت أن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$ هي مستوي (P) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له .
- (2) أ) أحسب المسافة بين I و المستوي (P) .
ب) أثبت أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) معادلتها في المستوي (P) : $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = 12$.
ج) إستنتج إحداثيات النقطة J مركز الدائرة (C) و نصف قطرها r .
- (3) لتكن $F\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}; -1; 2\right)$ نقطة من الدائرة (C) .
أ) عيّن تمثيلاً و سيطياً للمستقيم (T) الذي يمر (C) و (S) في النقطة F .
ب) عيّن إحداثيات النقطة K من المماس (T) حتى يكون حجم رباعي الوجوه $KIJF$ يساوي $\sqrt{3} uv$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) N عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 8 على الشكل $N = \overline{a740}$ و يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 9 على الشكل $N = \overline{26b0}$ حيث a و b عدنان طبيعيان غير معدومين .
أ) عيّن قيمتي العددين الطبيعيين a و b حتى يقبل N القسمة على 72 .
ب) إستنتج كتابة العدد الطبيعي N في النظام العشري .
ج) تحقق أن : $512a - 9b = 1464$.
- (2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية : (1) $512x - 3y = 1464$.
أ) حل المعادلة (1) .
ب) ما هي القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$ ؟
ج) أوجد حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x; y) = 488$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (z_n) متتالية أعداد مركبة معرفة بـ : $\begin{cases} z_0 = e^{i\theta} & ; \theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{cases}$.

(1) بيّن أنّ : $e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

(2) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_n = \arg(z_n)$ حيث : $u_n \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

• بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ أكتب u_n بدلالة n و θ .

(3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = z_n - \overline{z_n}$.
أ) أكتب v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج ؟

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $|z_n| \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin \theta$.

(4) أحسب المجموع : $S_n = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_{n-1}|$.

(5) إستنتج أنّ : $\cotang\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \cotang(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \dots + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$ و ذلك من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته $1cm$.

(1) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .

ب) أحسب $f'_n(x)$ و ادرس إشارتها .

ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .

(2) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

(3) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .

(II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

(1) أكتب $f'_n(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

(2) أ) بيّن أنّ المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة .

ب) إستنتج أنّ المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة .

(3) أ) بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ $n \in \mathbb{N}^*$ وَ $0 \leq x \leq 1$ لَدِينَا : $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$.

ب) إِسْتَنْتِجْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ لَدِينَا : $\frac{e^{-1}}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right]$.

ج) أَحْسِبْ $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(4) أ) إِعْتَمَادًا عَلَى السُّؤَالِ (1/II) بَيِّنْ أَنَّ : $I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$.

ب) إِسْتَنْتِجْ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

ج) أَحْسِبْ بِـ cm^2 مَسَاحَةَ الْحِيزِ الْمُسْتَوِيِّ A الْمَحْدَدِ بِالْمُنْحَنِيِّينَ (C_1) وَ (C_2) وَ الْمُسْتَقِيمَيْنِ $x=0$ وَ $x=1$.

إنتهى الموضوع الثاني