

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب الأعداد $a = -4, b = 2, c = 4$ وليكن العدد المركب $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) لتكن النقط A', B', C' التي لواحقها على الترتيب : $a' = ja, b' = jb, c' = jc$

أ- اكتب العدد j على الشكل المثلثي والأسّي واستنتج الشكل الجبري والأسّي للأعداد a', b', c'

ب- النقط A, B, C والدوائر ذات المركز O وأنصاف الأقطار 2، 3، 4 مرسومة على الشكل المرافق في الملحق،

أنشئ النقط A', B', C' على الرسم. (الرسم على الملحق (1))

(2) بين أن النقط A', B', C' في استقامة.

(3) نرمز بـ T لمنتصف القطعة المستقيمة $[A'C]$ و N لمنتصف $[C'C]$ و P لمنتصف $[C'A]$

- بين أن المثلث TNP متساوي الساقين.

(4) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ و S التشابه الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته 2

أ- اكتب العبارة المركبة لكل من التحويلين R و S

ب- عين لاحقتي النقطتين E و F صورتي النقطة B بالتحويلين R و S على الترتيب ثم أنشئ النقطتين E و F

التمرين الثاني : (4 نقاط)

تاجر للنباتات يشتري بضاعته من ثلاث مشاتل مختلفة نرمز لها بالرموز H_1, H_2, H_3 : 35% من النباتات يشتريها من

المشتل H_1 ، 25% من المشتل H_2 والباقي من المشتل H_3

كل مشتل يسلمه نوعين من الشجيرات كثيفة الأوراق و قليلة الأوراق وفق النسب التالية :

80% من انتاج المشتل H_1 كثيفة الأوراق ، 50% من انتاج المشتل H_2 كثيفة الأوراق و 30% من انتاج H_3 كثيفة الأوراق

(1) يختار التاجر شجيرة عشوائيا من المخزون المتوفر لديه ، و نعتبر الحوادث التالية :

H_1 : << الشجيرة المختارة من المشتل H_1 >> H_2 : << الشجيرة المختارة من المشتل H_2 >>

H_3 : << الشجيرة المختارة من المشتل H_3 >> F : << الشجيرة المختارة كثيفة الأوراق >>

أ- شكل شجرة الاحتمالات التي تفسر الوضعية.

ب- احسب احتمال أن تكون الشجيرة المختارة كثيفة الأوراق و من المشتل H_3

ت- بين أن احتمال أن تكون الشجيرة قليلة الأوراق يساوي 0,475

ث- إذا علمت أن الشجيرة المختارة قليلة الأوراق ، فما هو احتمال أن تكون من المشتل H_1 (تدور النتيجة إلى 10^{-3})

(2) عينة تتكون من 1000 شجيرة من المخزن يختار زبون من بينها شجيرتين عشوائيا و نفرض أن النسب هي نفسها كما

في الجزء الأول ، سعر الشجيرة كثيفة الأوراق 300 دينار و سعر قليلة الأوراق 200 دينار

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بالاختيار ثمن الشجيرتين المختارتين.

أ- ماهي قيم X ؟

ب- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X (تدور النتائج إلى 10^{-3}) ثم احسب $E(X)$ الأمل الرياضي لهذا المتغير.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

الشكل في الملحق هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $[-1; 2]$ بـ : $f(x) = \frac{-2x+2}{x-3}$

والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

(1) أ- شكل جدول تغيرات الدالة f على $[-1; 2]$

ب- استنتج أنه إذا كان $x \in [-1; 2]$ فإن $f(x) \in [-1; 2]$

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

- عين على محور الفواصل الأعداد u_0, u_1, u_2, u_3 دون حساب هذه الحدود (الرسم في الملحق)
ثم أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ، ماذا تستنتج؟

(4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-2}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ثم اكتب v_n بدلالة n ، هل (v_n) متقاربة؟

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

ت- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3}{u_n-2} + 1$

ث- ثم احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{3}{u_n-2} + \frac{3}{u_{n+1}-2} + \dots + \frac{3}{u_{n+2019}-2}$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm$

I- لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي : $h(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1/ أدرس تغيرات الدالة h و شكل جدول تغيراتها

2/ بين أن المعادلة $h(x) = 0$ لا تقبل حلاً على المجال $]0, 1[$ و تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]1, +\infty[$ ، ثم تحقق

أن : $1,5 < \alpha < 2$ و استنتج إشارة $h(x)$.

II- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$

1- أحسب نهايات f عند طرفي مجال تعريفها .

2- عبر عن $f'(x)$ بدلالة $h(x)$ ، استنتج تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات .

3- بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ثم عين حصاراً لـ $f(\alpha)$.

4- عين معادلة المماس (Δ) للمنحني (c_f) الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$

5- أرسم (c_f) و (Δ)

III - ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $x^3 + 2mx^2 + x + 2m = 2 \ln x$

التمرين الأول: (4 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $(\bar{z} + \sqrt{3} + 3i)(\bar{z}^2 - 6\bar{z} + 12) = 0 \dots (1)$ ، حيث $\bar{z}$ هو مرافق z
- (2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط A, B, C التي لواحقتها :
- $$z_C = -\sqrt{3} + 3i, z_B = 3 - i\sqrt{3}, z_A = 3 + i\sqrt{3}$$

أ- اكتب الأعداد المركبة z_C, z_A و $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث OAC .

ب- اكتب على الشكل الجبري العدد $L = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1440} + i\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{2019}$

(3) لتكن D نظيرة C بالنسبة إلى محور الفواصل ، بين أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان.

(4) عين نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه $E(3 - \sqrt{3}, 0)$ و يحول النقطة A إلى C .

(5) أ- بين أن النقط C, O, E, A تنتمي إلى دائرة واحدة (Γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ب- عين طبيعة و العناصر المميزة لـ (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي الذي مركزه L و نسبته $-\sqrt{6}$.

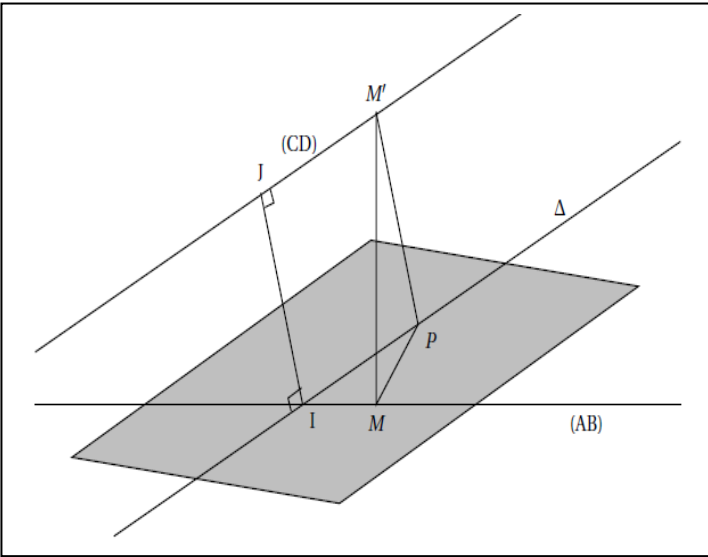
التمرين الثاني: (5 نقاط)

ينسب الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$B(10; -8; 2), C(-1; -8; 5), D(14; 4; 8)$ حيث:

- (1) أ) عين تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (AB) و (CD)
- ب) تحقق أن المستقيمين (AB) و (CD) ليسا من نفس المستوي
- (2) نعتبر النقطة I من المستقيم (AB) ذات الفاصلة 5 و النقطة J من المستقيم (CD) ذات الفاصلة 4
- أ- عين إحداثيات كلا من النقطتين I و J ثم استنتج المسافة IJ
- ب- بين أن المستقيم (IJ) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (CD)

(3) في الرسم المقابل :



مثلنا المستقيمين (AB) و (CD) و المستقيم (Δ) الذي

يوازي (CD) و يمر بالنقطة I

نعتبر نقطة M من (AB) تختلف عن I

و M' نقطة من (CD) تختلف عن J

وليكن (Δ') المستقيم الذي يوازي (IJ) و يشمل M'

يقطع (Δ) في نقطة وحيدة P

أ) برهن أن النقط I, D, C تعين مستويا

ب) بين أن كلا من المستقيمتين (Δ) و (Δ') و (IJ)

تنتمي للمستوي (CDI) .

ت) استنتج أن (Δ') يقطع (Δ) في نقطة وحيدة P .

ث) أثبت أن المثلث MPM' قائم في P .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي : $u_{n+1} = \frac{u_n + 12}{4}$

1/ - برهن بالتراجع انه من أجل عدد طبيعي $n : u_n > 4$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، واستنتج أنها متقاربة

ج- عين نهاية المتتالية (u_n)

2/ - نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $t_n = u_n - 4$

أ- برهن أن المتتالية (t_n) هندسية معيناً أساسها

ب- اكتب عبارة الحد العام t_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 4}{e}\right)$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الاول

(4) - أحسب بدلالة n المجموعين : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S'_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$ التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) $g(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

(c_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس ($O, \vec{i}, \vec{j}$) .

(1) ادرس تغيرات الدالة g و اكتب جدول تغيراتها

(2) أ) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

ب) بين أن الدالة g زوجية و فسر النتيجة هندسيا

(3) لتكن النقطة ($M(x_0, g(x_0))$ من (c_g) حيث $x_0 > 0$ ، و M' نظيرتها بالنسبة لمحور الترتيب

و لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على محور الفواصل

- تحقق أن $HM = MM'$ تكافئ : $e^{x_0} + e^{-x_0} - 4x_0 - 2 = 0$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$

(c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس ($O, \vec{i}, \vec{j}$) .

(1) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 4 \right) + e^{-x} - 2$

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج) احسب $f'(x)$ ثم تحقق أن $f'(x) = 0$ تكافئ : (1) $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0 \dots$

- حل في $[0; +\infty[$ المعادلة (1) ثم استنتج إشارة $f'(x)$

(2) اكتب جدول تغيرات الدالة f ثم بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً موجباً تماماً نرمز له α

- تحقق أن $2,4 < \alpha < 2,5$

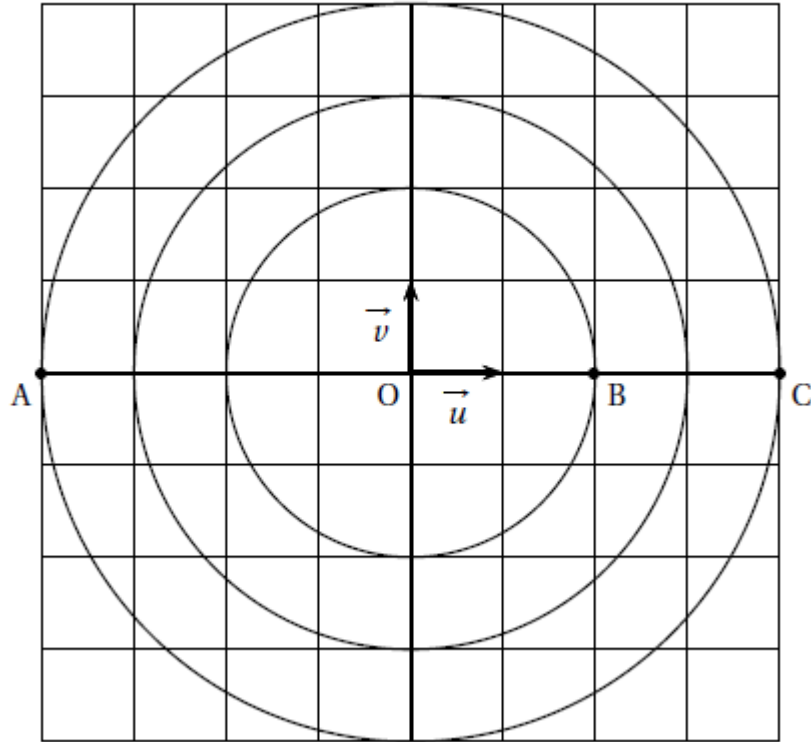
(3) تحقق أن (c_f) و (c_g) يتقاطعان في النقطة O مبدأ المعلم

ارسم (c_f) و (c_g) في نفس المعلم (نقبل أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g(x) > f(x)$)

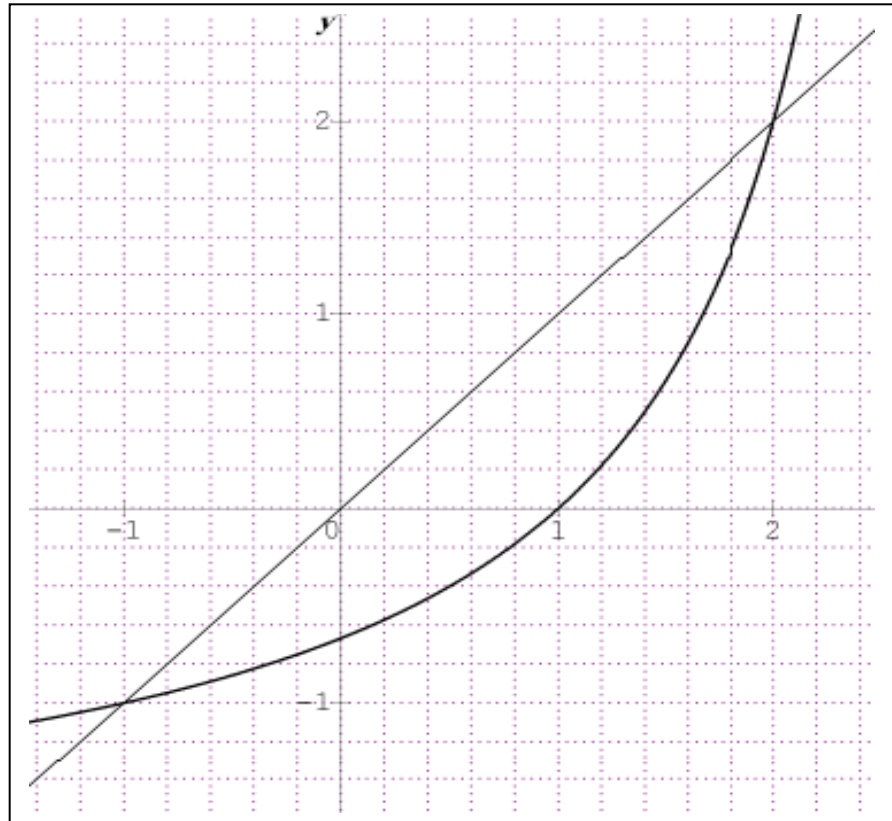
(4) احسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين (c_f) و (c_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 2$

الملحق (1) (الموضوع الأول)

التمرين الأول:



التمرين الثالث:



ملاحظة : يعاد مع ورقة الاجابة في حالة اختيار الموضوع الأول)