

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث كل الكرات لانفرق بينهما عند اللمس و:

U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 0 .

U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وكرتين خضراء تحمل الرقمين 1 ، 0 .
(1) نختار عشوائيا أحد الصندوقين ، فإذا كان U_1 أحد نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع ،
وإذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي بالإرجاع .

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A: "سحب كرتين من نفس اللون "

B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

C: "سحب كرة حمراء على الأقل "

2. هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ علل .

3. إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين . فما هو احتمال أن تكون من الصندوق U_1 ؟

(II) نأخذ كل الكرات الموجودة في U_1 و U_2 ونضعها في صندوق آخر U_3 . نسحب عشوائيا من

الصندوق U_3 كرتين في آن واحد. وليكن x المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الأرقام التي تحملها الكرتين المسحوبتين .

1. عين قيم المتغير العشوائي x .

2. عين قانون الاحتمال لـ x ثم احسب أمله الرياضيائي .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي حيث: $A_0B_0 = 8$ (الوحدة هي السنتيمتر) ، ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتالية النقط (B_n) كما يلي : $B_{n+1} = S(B_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

(1) أنشئ النقط B_1, B_2, B_3 و B_4 .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان: $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

(3) نعرف متتالية (u_n) بـ : $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ/ أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب/ أكتب عبارة u_n بدلالة n .

ج/ نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، أحسب δ_n بدلالة n ثم أوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$

(4) أ/ حل في $Z \times Z$ المعادلة : $3x - 4y = 2$

ب/ ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 .

جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ المعادلة ذات المجهول z : $\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \dots (E)$

حيث: $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z .

أ/ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$.

ب / حل في $\square$ المعادلة (E) .

(2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها

على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \bar{z}_B$ ، $z_D = 3$.

أ / عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

ب / عين طبيعة المثلث ABC .

(3) أ/ أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

(4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0; +\infty[$

- عين قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overline{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .

5/ أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \vec{0}$.

ب/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|-\overline{AM} + 2\overline{BM} - 3\overline{DM}\| \leq 2\|\overline{BM} - \overline{CM}\|$

ج/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

التمرين الرابع: (07نقاط)

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 e^x$

أ/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ استنتج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

h دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$. (C_h) تمثيلها البياني (أنظر الملحق)
أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب f'(1).

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

3/ أ/ بين أن المعادلة: $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5 < \beta < 1.6$

و $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب / أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h).

ج / بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

4/ أ/ أرسم (T) و (C_f). (الملحق يعاد مع ورقة الإجابة)

ب / m عدد حقيقي موجب تماما، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متميزين:

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

5/ أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$

ب/ ليكن العدد λ من المجال $]0; 1[$ ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h)

والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = \lambda$

- استنتج A(λ) (مقدرة بوحدة المساحة)، ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $C(3;2;1)$ ، $B(1;2;0)$ ، $A(3;1;0)$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \\ z = -5\alpha \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب، (Q) مستوي معرف بـ:

1/ أ/ أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\sin ABC$ و $\cos ABC$.
ب/ أحسب مساحة المثلث ABC .

ج/ بين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

د/ بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمه : $V = \frac{2m+5}{6} uv$

2/ أ/ بين أن: (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية: $-2x + y = \frac{-5}{2}$.

ب/ استنتج أن المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وأنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلها الوسيط.

ج/ أحسب $d(D; (Q))$ ثم استنتج بدلالة m المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) .

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$

أ/ بين أنه من أجل عدد حقيقي m فإن (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب/ عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m) .

4) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس سطح الكرة (S_m) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x - 5y = 2$

أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.

ب/ استنتج حلول المعادلة (E) .

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع: $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$.

أ/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب/ عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $\text{PGCD}(a; b) = 2$.

ج/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $A = 5n^2 + 7n + 2$ و $B = 11n^2 + 15n + 4$.

أ/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب/ استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

(1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

$$z_A = 1 - i \text{ و } z_B = 2 + \sqrt{3} + i$$

اللاحقتين: اكتب z_A على الشكل الأسّي .

ب/بين أن: $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد z_B .

ج/هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

(3) أ/أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.

ب/احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقدرة بوحدة المساحة)

ج/عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$

د/عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

(4) نضع: $f = ROS$ (يرمز O إلى تركيب التحويلين S و R) .

أ/عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب/أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة) .

(5) أ/إذا كان $S(M) = M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب/عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها: $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ/تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$

ب/احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج/أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ/بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتهما:

$$y = x - e \text{ و } y = -x + \ln 2 + e \text{ عند } +\infty \text{ وعند } -\infty \text{ على الترتيب.}$$

ب/أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .

ج/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

(3) أرسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f)

(4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y = m x - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A \left(\frac{\ln 2}{2} + e ; \frac{\ln 2}{2} \right)$.

ب/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f).

(5) نضع : $I = \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} [f(x) - (x-e)] dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln(1+X^n) dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ/ فسر هندسيا العدد I واحسب العدد I_1

ب/ بين أن : $0 \leq I_n \leq \ln 2$

ج/ عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(6) باستعمال : $\ln(1+X) \leq X$ ، من أجل كل $X \in]0; +\infty[$

أ/ استنتج أن : $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

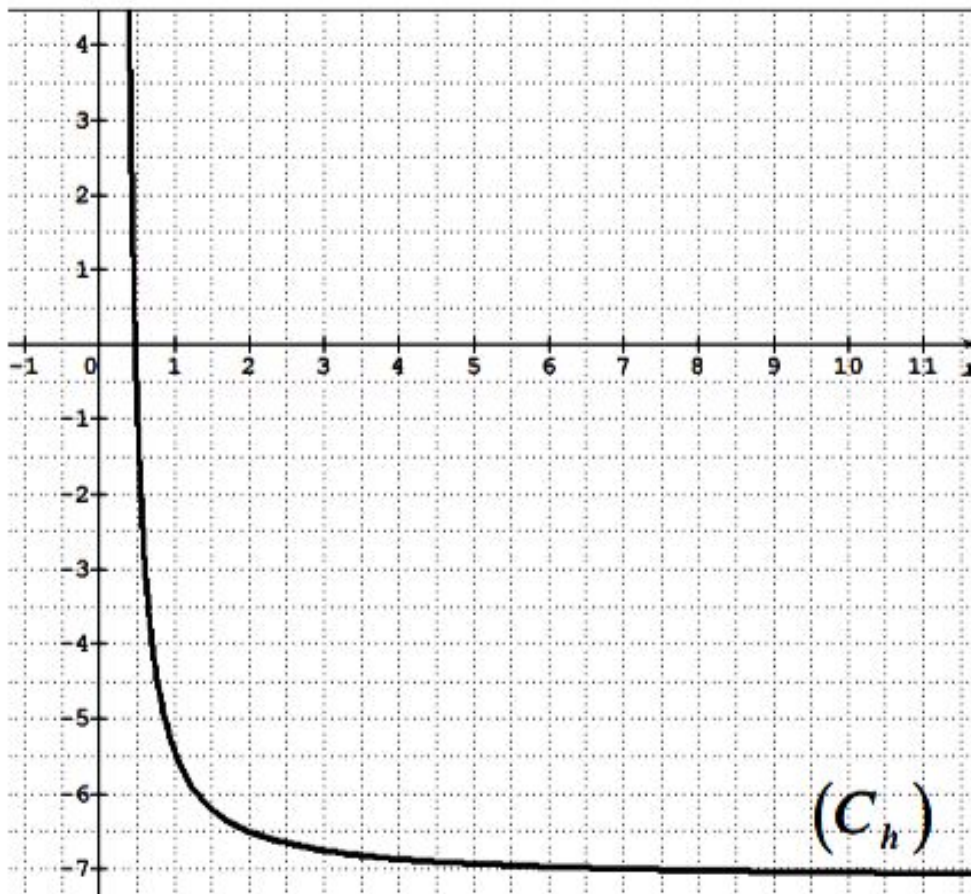
ب/ اعط حصرا للعدد $I + I_1$.

الملحق:

الاسم :

اللقب :

القسم :



$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \\ = 1 - \frac{689}{1400} \\ = \frac{711}{1400}$$

$$P(Y \cap \bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{A_1^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_5^1}{56} = \frac{15}{56}$$

$$P(Y) = \frac{125}{137}$$

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب

$$C_n^p = C_{13}^2 = 78$$

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

$$= 0 + \frac{24}{78} + \frac{68}{78} + \frac{48}{78} + \frac{4}{78} \\ = \frac{144}{78}$$

$P(X=0)$: احتمال سحب كرتين من 3 لا يصبغ رتبهما

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{78} = \frac{3}{78}$$

$P(X=1)$: احتمال سحب كرتين من 3 لا يصبغ رتبهما 1

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_8^1}{78} = \frac{24}{78}$$

$P(X=2)$: احتمال سحب كرتين من 3 لا يصبغ رتبهما 2

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_8^1 + C_8^2}{78} = \frac{34}{78}$$

$P(X=3)$: احتمال سحب كرتين من 3 لا يصبغ رتبهما 3

$$P(X=3) = \frac{C_8^2}{78} = \frac{16}{78}$$

$P(X=4)$: احتمال سحب كرتين من 3 لا يصبغ رتبهما 4

$$P(X=4) = \frac{C_8^2}{78} = \frac{1}{78}$$

طال القرين ٥٠١

$$P(Y) = P(\bar{Y}) = \frac{1}{2} \text{ معناه } P(Y) + P(\bar{Y}) = 1$$

(I) عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين على التوالي من الصندوق ١٤ بدون عار خلع (أثرية)

$$A_n^p = A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$$

عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين على التوالي من الصندوق ١٤ بدون عار خلع (أثرية)

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{8!}{(8-2)!} = 56$$

(1) A: "سحب كرتين من نفس اللون"

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^2 + A_3^2}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{3^2 + 2^2}{25}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{20 + 6}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{9 + 4}{25} = \frac{689}{1400}$$

B: "سحب كرتين أحدهما أصفر والآخر أحمر"

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^2 + A_3^2}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{1^2 + 3^2 + 1^2}{25} = \frac{583}{1400}$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^2 \times A_3^1 + A_3^2 \times A_5^1 + A_5^2}{56}$$

$$+ \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{25} = \frac{1213}{1400}$$

A ∩ B: "سحب كرتين من نفس اللون أحدهما أصفر والآخر أحمر"

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{A_3^2 + A_5^2}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{1^2 + 1^2 + 1^2}{25}$$

$$= \frac{37}{175} \approx 0,21$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{689}{1400} \times \frac{583}{1400} \approx 0,2$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

الحادثان A و B غير مستقلين

$$P_A(Y) = \frac{P(Y \cap A)}{P(A)}$$

$$P(Y \cap A) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_5^1}{56}$$

$$= \frac{15}{56}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0 B_0 = 8$ ، التشابه المباشر S

مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1} = S(B_n)$ ،

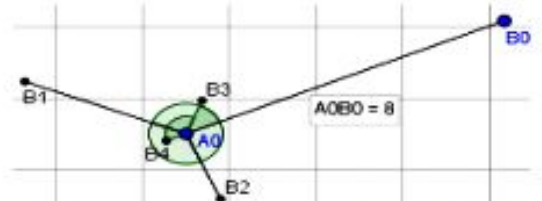
1) إنشاء النقط B_1, B_2, B_3, B_4 و B_4 :

$$k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} A_0 B_1 = \frac{1}{2} A_0 B_0 = 4 \\ (\overrightarrow{A_0 B_0}, \overrightarrow{A_0 B_1}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad B_1 = S(B_0) \text{ يكفي}$$

$$k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} A_0 B_2 = \frac{1}{2} A_0 B_1 = 2 \\ (\overrightarrow{A_0 B_1}, \overrightarrow{A_0 B_2}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad B_2 = S(B_1) \text{ معناه}$$

$$k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} A_0 B_3 = \frac{1}{2} A_0 B_2 = 1 \\ (\overrightarrow{A_0 B_2}, \overrightarrow{A_0 B_3}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad B_3 = S(B_2) \text{ معناه}$$

$$k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} A_0 B_4 = \frac{1}{2} A_0 B_3 = \frac{1}{2} \\ (\overrightarrow{A_0 B_3}, \overrightarrow{A_0 B_4}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad B_4 = S(B_3) \text{ معناه}$$



2) اثبات أن المثلثين $A_0 B_n B_{n+1}$ و $A_0 B_{n+1} B_{n+2}$ متشابهان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$B_{n+1} = S(B_n) \text{ معناه } A_0 B_{n+1} = \frac{1}{2} A_0 B_n$$

$$\text{و } (\overrightarrow{A_0 B_n}, \overrightarrow{A_0 B_{n+1}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، بما أن : } k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{A_0 B_{n+2}}{A_0 B_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} A_0 B_{n+1}}{A_0 B_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{A_0 B_{n+1}}{A_0 B_n} = \frac{\frac{1}{2} A_0 B_n}{A_0 B_n} = \frac{1}{2}$$

$$(\overrightarrow{A_0 B_{n+1}}, \overrightarrow{A_0 B_{n+2}}) = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{A_0 B_n}, \frac{1}{2} \overrightarrow{A_0 B_{n+1}} \right) = (\overrightarrow{A_0 B_n}, \overrightarrow{A_0 B_{n+1}})$$

فإن المثلثين $A_0 B_n B_{n+1}$ و $A_0 B_{n+1} B_{n+2}$ متشابهان

$$(\text{ضلعان و زاوية محصورة بينهما}) \text{ ومنه : } \frac{B_n B_{n+2}}{B_n B_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

3) اثبات أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$: نعرف

متتالية (u_n) بـ $u_n = B_n B_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{ومنه : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1} B_{n+2}}{B_n B_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ متتالية هندسية أساسها}$$

$$\frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } u_0 = B_0 B_1$$

ب) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n = B_0 B_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n$

ج) نضع المجموع : $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حساب δ_n بدلالة n ثم إيجاد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$: م.ح.م هندسية

$$\delta_n = u_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2B_0 B_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 2B_0 B_1 \text{ ومنه :}$$

4) (*) نحل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 4y = 2$ (1)

$$(1) \text{ يكافئ } 3x = 4y + 2 \text{ يكافئ } 3x \equiv 2[4]$$

$$\text{يكافئ } x \equiv 2[4] \text{ يكافئ } 7 \times 3x \equiv 7 \times 2[4]$$

ومنه : $x = 4\lambda + 2$ ، $\lambda \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$y = 3\lambda + 1 \text{ إذن : } S = \{(4\lambda + 2; 3\lambda + 1); \lambda \in \mathbb{Z}\}$$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون

النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : (Δ) العمودي على $(A_0 B_0)$ في النقطة A_0 وكذلك

$$(\overrightarrow{A_0 B_0}, \overrightarrow{A_0 B_n}) = (\overrightarrow{A_0 B_0}, \overrightarrow{A_0 B_1}) + (\overrightarrow{A_0 B_1}, \overrightarrow{A_0 B_2}) + \dots$$

$$\dots + (\overrightarrow{A_0 B_{n-1}}, \overrightarrow{A_0 B_n}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \dots + \frac{3\pi}{4} = n \frac{3\pi}{4}$$

$$B_n \text{ تنتمي إلى } (\Delta) \text{ معناه } (\overrightarrow{A_0 B_0}, \overrightarrow{A_0 B_n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ، } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{نجد : } n \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ يكافئ } 3n = 4 \left(\frac{1}{2} + k \right)$$

$$\text{يكافئ } 3n - 4k = 2 \text{ يكافئ } 3n = 2 + 4k$$

$$\text{ومنه قيم } n \text{ هي } n = 4k' + 2 \text{ ، } k' \in \mathbb{N}$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) (*) نبين أن المعادلة (E) تكافئ : $(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

$$\text{لدينا : } \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \text{ (E) ...}$$

$$(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0 \text{ يكافئ } \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 7\bar{z} + \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0$$

$$\text{يكافئ } \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$$

ب) (*) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

$$(E) \text{ تكافئ } (\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \text{ ، يكافئ : } (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } \Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 \text{ ، } \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}i \text{ و } z_1 = 2 - \sqrt{3}i$$

ومنه: من أجل k يمسح المجال $[0; +\infty[$ المجموعة (Γ)

هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$

$$\text{لاحقته: } 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3}$$

(5) أ* / تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

$$-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 2), (D; \alpha)\}$

$$\alpha = -3 \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x_C = \frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$$

ب* / تعيين (E) مجموعة النقاط M من المستوى حيث :

$$(*) \dots \|\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$$

$$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MD}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}\| \text{ تكافئ } (*)$$

$$\|-(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD})\| \leq 2\|\overrightarrow{BC}\| \text{ تكافئ } (*)$$

$$CM \leq BC \text{ تكافئ } \|(-1+2-3)\overrightarrow{CM}\| \leq 2BC \text{ تكافئ } (*)$$

ومنه مجموعة النقاط (E) هي قرص مركزه النقطة C

ونصف قطره هو : $BC = 2\sqrt{3}$

ج* / استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) ونصف

المستقيم (AB) : لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$BC = 2\sqrt{3}$ و $AC = 2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم (AB)

هو القطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(1) g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 e^x$

أ* / دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$: $g'(x) = (x^2 + 2x)e^x$

بما ان $g'(x) > 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

ب* / استنتاج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $x < \frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما

على $]0; +\infty[$ ، فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x > 1$ فإن $x > \frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على

$]0; +\infty[$ ، فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه : $S = \{-1; 2 - \sqrt{3}i; 2 + \sqrt{3}i\}$

(2) أ* / تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب

$(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B - z_A)^n = (2 + \sqrt{3}i + 1)^n = (3 + \sqrt{3}i)^n$$

$$(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

ومنه $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا معناه:

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \text{ ومنه } \arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi$$

$$n = 12k + 6; k \in \mathbb{N} \text{ إذن}$$

ب* / تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

بما ان : $AB = AC = BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

(3) أ* / كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي :

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب* / استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره

$$\text{المميزة: } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه } (z_A - z_C) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C)$$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي

مركزه النقطة C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب* / تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

$$\begin{cases} \left| \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} \right| = \sqrt{3} \\ (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ لدينا: } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه}$$

إذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة

بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

$$\text{لاحقته } z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2}$$

4 أ* / تعيين قياس للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$:

$$\text{لدينا: } (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

ب* / استنتاج (Γ) مجموعة النقاط $M(z)$ حيث :

$$z - z_A = k(z_B - z_A) \text{ معناه } z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \text{ معناه}$$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$
 $x^2 - 2x + 2 > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لأن $\Delta = -4$
 ومنه: (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0; +\infty[$

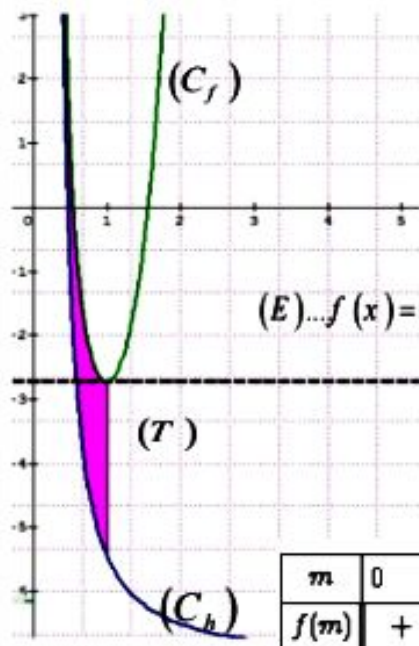
ج/ نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 بطلب كتابة معادلته :

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ فإن تمثيلها (C_f) يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0; +\infty[$ مماسا

$$f'(1) = 0; f(1) = -e, (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ومنه: $(T): y = -e$

(4) *أ/ رسم (T) و (C_f) :



ب/ *أ/ إيجاد قيم m حتى تقبل المعادلة (E)

حليين متميزين:
 لدينا m وسيط حقيقي حيث $m > 0$

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

المعادلة (E) تكافئ

$$f(x) = f(m)$$

إشارة $f(m)$:

m	0	α	1	$E + \infty$
$f(m)$	+	0	-	-

من أجل $m = 1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .
 ومنه: المعادلة (E) تقبل حليين متميزين لما

$$m \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

(5) *أ/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = \int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt$$

الدالة: $t \rightarrow (t^2 - 2t + 2)e^t$ مستمرة على $]0; +\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية على $]0; +\infty[$

$$[(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e]' = (t^2 - 2t + 2)e^t$$

$$\int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt = \int_1^x [(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e] dt$$

$$= (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

(2) / معرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$:
***أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب/ *أ/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{ومنه: } f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

ج/ *أ/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	$1 + \infty$
$f'(x)$	-	+

إشارة $f'(x)$:

f متزايدة تماما على $]1; +\infty[$

f متناقصة تماما على $]0; 1[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-e = -2.71$	$+\infty$

(3) *أ/ نبين أن المعادلة: $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل

حليين α و β حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$ و $1.5 < \beta < 1.6$

$$(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0 \text{ تكافئ } (x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$$

تكافئ $f(x) = 0$ ، لدينا: $f(0.5) \approx 1.25$ ، $f(0.6) \approx -0.74$

بما أن الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5; 0.6]$

$$f(0.6) \times f(0.5) < 0$$

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد α

$$\text{حيث: } f(\alpha) = 0, 0.5 < \alpha < 0.6$$

$$\text{لدينا: } f(1.5) \approx -0.60, f(1.6) \approx 0.44$$

بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5; 1.6]$

$$f(1.6) \times f(1.5) < 0$$

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد β

$$\text{حيث: } f(\beta) = 0, 1.5 < \beta < 1.6$$

***أ/ استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:**

بما أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حليين α و β فإن (C_f)

يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب/ *أ/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) :

لدينا $0 + 2(0) - 2m - 5 = 0$ أي $m = -\frac{5}{2}$ إذن: $D \in (ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه
 / * نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V = \frac{2m+5}{6} uv$

لدينا $h = d(D, (ABC))$, $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h$ هو الارتفاع

$$d(D; (ABC)) = \frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2m+5}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2m+5}{3} = \frac{2m+5}{6} uv \text{ ومنه}$$

(2) / * نبين أن (Q) هو المستوى المحوري لقطعة المستقيم

$[AB]$ معادلته الديكارتية $-2x + y = \frac{-5}{2}$ هناك عدة طرق منها

* إحداثيات $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيط لـ

(Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2, -1, 0)$ عمودي على شعاعي توجيهه

$\vec{u}(-2; -4; -5)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

/ * تعيين معادلة (Q) : لدينا

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \dots (1) \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \dots (2) \\ z = -5\alpha \dots (3) \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

يكافئ $\alpha = \frac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد: $x = 2 - 2\left(\frac{z}{-5}\right) + \beta$

ومنه: $\beta = x - 2 - \frac{2z}{5}$ نعوض قيمة α و β في (2) نجد:

$$-2x + y = \frac{-5}{2} \text{ ومنه } y = \frac{3}{2} - 4\left(\frac{z}{-5}\right) + 2\left(x - 2 - \frac{2z}{5}\right)$$

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x + 2y + 5 = 0$

/ * بطريقة أخرى: (Q) يشمل $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$

و $\overrightarrow{AB}(-2; 1; 0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيط يحقق

(Q) : $-2x + y = \frac{-5}{2}$ ومنه المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$

/ * استنتاج أن المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وهما

مقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيط:

بما أن $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (1) + 0 \cdot (-2) = 0$ فإن (Q)

و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

/ * تعيين التمثيل الوسيط للمستقيم (Δ) :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 5 = 0 \dots (1) \\ -4x + 2y + 5 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد:

ب / * استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_h)

و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \lambda$ و $x = 1$

(مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda \in]0; 1]$:

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda [f(t) - h(t)] dt = - \int_\lambda^1 [f(t) - h(t)] dt$$

$$A(\lambda) = - \left[(\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda - 3e \right]$$

$$= (3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda) u a$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda] = 3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول: (04 نقاط)

$D(0; 0; m)$ و $C(3; 2; 1)$, $B(1; 2; 0)$, $A(3; 1; 0)$

(1) / * حساب $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA}(2; -1; 0)$, $\overrightarrow{BC}(2; 0; 1)$

لدينا: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2(2) + 0(-1) + 1(0) = 4$

/ * استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos ABC$ و $\sin ABC$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cos ABC \text{ لدينا}$$

$$\cos ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 ABC = 1 - \cos^2 ABC = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\sin ABC = -\frac{3}{5} \text{ أو } \sin ABC = \frac{3}{5}$$

ب / * حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC} :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \times \sin ABC = \frac{1}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2} u a$$

ج / * نبين أن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 1(2) + 2(0) - 2(1) = 0 \text{ وكذلك}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = 1(2) + 2(-1) - 2(0) = 0$$

فإن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

/ * استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$$(ABC): x + 2y - 2z + d = 0 \text{ لدينا}$$

$$d = -5 \text{ تكافئ } A \in (ABC) \text{ تكافئ } 3 + 2 + d = 0$$

ومنه: $(ABC): x + 2y - 2z - 5 = 0$

د / * تبين أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

$$n \in \mathbb{N}^*, b = 11n + 4 \text{ و } a = 5n + 2$$

$$11a - 5b = 11(5n + 2) - 5(11n + 4) = 55n + 22 - 55n - 20 = 2$$

ومنه $d/2$: إذن $d \in D_2 = \{1; 2\}$.

ب/ *تعين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون:

$$PGCD(a; b) = 2 \text{ لدينا } PGCD(a; b) = 2$$

معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b - 2a$

أي 2 يقسم $11n + 4 - 2(5n + 2)$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$: الشكل من الشكل

ج/ *استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون

العددين a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a; b) = 2$ قيم $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$

ومنه : قيم n حيث $PGCD(a; b) = 1$ هي $n = 2\alpha + 1$ / $\alpha \in \mathbb{N}$

(3) *أ/ نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$$n \in \mathbb{N}, B = 11n^2 + 15n + 4 \text{ و } A = 5n^2 + 7n + 2$$

$$B = (n+1)(11n+4) = b(n+1), A = (n+1)(5n+2) = a(n+1)$$

ومنه $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب/ *استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين

A و B :

$$PGCD(A; B) = PGCD(a(n+1); b(n+1)) = (n+1)PGCD(a; b)$$

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a; b) = 2$ معناه $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1)2 = 4\alpha + 2$$

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ معناه $n = 2\alpha + 1$ / $\alpha \in \mathbb{N}$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1 + 1)1 = 2\alpha + 2$$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1/ تعين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \dots (1) \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2iz_1 + z_2 = -i + \sqrt{3} \dots (1') \\ \sqrt{3}z_1 + 2iz_1 - z_2 = i - i\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1') و (2) : $\sqrt{3}z_1 = \sqrt{3}(1-i)$ ومنه $z_1 = 1-i$

بالتعويض في (1) نجد : $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$

$$z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ على الشكل الأسّي} \quad z_B = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})i}{2}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) \frac{(1 + \sqrt{3}i)}{2} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$5x - 2z - 10 = 0 \text{ نضع } z = t \text{ (} t \text{ وسيط حقيقي) نجد}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}t + 2 \\ y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{إذن : } y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \text{ و } x = \frac{2}{5}t + 2$$

ج/ *حساب $d(D; (Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين

$$D \text{ و } (Q) : d(D; (Q)) = \frac{|-4(0) + 2(0) + 5|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\Delta)$$

بمأن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D; (\Delta))^2 = d(D; (Q))^2 + d(D; (ABC))^2$$

$$d(D; (\Delta)) = \sqrt{\frac{5}{4} + \left(\frac{2m+5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{16m^2 + 80m + 145}}{6}$$

(3) *أ/ نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي m - (S_m) سطح كرة

يطلب تعين مركزها ونصف قطرها :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0 \text{ لدينا}$$

ومنه : $x^2 + y^2 + (z - m)^2 = 9$ إذن : (S_m) سطح

كرة مركزها النقطة $D(0; 0; m)$ ونصف قطرها $r = 3$.

ب/ *تعين m حتى يكون المستوى (ABC) مماسا لسطح

الكرة (S_m) . (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني

$$d(D; (ABC)) = 3 \text{ أي أن } \frac{2m+5}{3} = 3 \text{ ومنه : } m = 2$$

(4) معادلة المستوى (P) الموازي تماما للمستوى (ABC)

$$\text{ويعبر عن } (S_m) \text{ لدينا : } x + 2y - 2z + d = 0 \quad (P)$$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني :

$$|-4 + d| = 9 \text{ أي } d(D; (P)) = \frac{|-4 + d|}{3} = 3$$

ومنه : $d = 13$ أو $d = -5$ هو المستوى (ABC)

$$\text{إذن : } x + 2y - 2z + 13 = 0 \quad (P)$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$11x - 5y = 2 \text{ ، } y = 4[11] \text{ ، } 11x - 5y = 2 \dots (E)$$

$$11x - 5y = 2 \text{ يكافئ } 5y = 11x + 2 \text{ ومنه } 5y = -2[11] \text{ أي}$$

$$\text{أي } 5y = 20[11] \text{ ومنه : } y = 4[11]$$

ب/ *استنتاج حلول المعادلة (E) :

$$y = 4[11] \text{ معناه } y = 11k + 4 \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \text{ ، نعوض قيمة}$$

$$y \text{ في المعادلة } (E) \text{ نجد : } x = 5k + 2$$

$$\text{ومنه : } S = \{(11k + 4; 5k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) *أ/ تعين القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a; b)$:

***/ استنتاج الشكل الأسّي للعدد z_B :**

$$z_B = z_A (1 + \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (1 + \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_B = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ ومنه:}$$

ج/ تعيين قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد

$$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n \text{ تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت:}$$

$$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = (1 + \sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{3}} \text{ لدينا: } \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{أي: } k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ومنه: } \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = \frac{n\pi}{3} [2\pi]$$

أي $4n - 12k = 3$ لا تقسم 3 ومنه $\text{PGCD}(12, 4) = 4$ المعادلة لا تقبل حلول إذن لا يوجد قيم لـ n تحقق المطلوب.

(3) */ إيجاد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران

r الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل: $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}} z$

$$z_{B'} = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}} \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_{B'} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i\frac{\pi}{12}} = \overline{z_B} = 2 + \sqrt{3} - i$$

ب/ حساب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$ لدينا:

$$R = \frac{BB'}{2} = \frac{|z_{B'} - z_B|}{2} = \frac{|-2i|}{2} = \frac{2}{2} = 1, S = \pi R^2$$

ومنه: $S = \pi u.a$

ج/ تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$$\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$$

$$\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ومنه } 2\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

$$(\overline{u}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ تفسيرها:}$$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ما عدا النقطة B .

د/ تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل:

$$(\overline{B'B}; \overline{B'A}) = \arg\left(\frac{z_A - z_{B'}}{z_B - z_{B'}}\right) = \arg(z_A - z_{B'}) - \arg(z_B - z_{B'})$$

$$(\overline{B'B}; \overline{B'A}) = \arg(1 - i - 2 - \sqrt{3} + i) - \arg(2i) = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(\overline{B'B}; \overline{B'A}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه نجد:}$$

$$z_C = 1 + i \text{ ومنه } \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 1 \end{cases} \text{ معناه: } \overline{B'B} = \overline{AC}$$

بطريقة أخرى: لدينا $z_{B'} = \overline{z_B}$ معناه BB' متناظرتان

بالنسبة لمحور الفواصل ولدينا: $A(1; -1)$ و $B'(2 + \sqrt{3}; -1)$ أي: AB' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم معادلته $y = -1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد:

$$z_C = \overline{z_A} = 1 + i$$

***/ إيجاد z_I لاحقة مركز ثقل المستطيل $AB'BC$**

$$z_I = \frac{1 - i + 2 + \sqrt{3} + 1 + i}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } z_I = \frac{z_A + z_{B'} + z_B + z_C}{4}$$

(4) */ تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون

$f = \text{ros}$: $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 وزاويته θ أي ros S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ

تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته $\theta - \frac{\pi}{6}$

$$\text{ومنه: } k = 2 \text{ و } \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ أي } \theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ومنه عبارة التشابه S هي: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}} z$ ونكتب $z' = 2iz$

ب/ إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S :

مساحة صورة الدائرة (γ) هي S' حيث: $s' = k^2 s = 4\pi u.a$

(5) */ إذا كان $S(M) = M'$ ، إيجاد طبيعة المثلث OMM' :

$$\arg\frac{z'}{z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ معناه } \frac{z'}{z} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه: } z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}} z$$

$$|z'| = 2|z| \text{ أي } \left|\frac{z'}{z}\right| = 2 \text{ و } (\overline{OM}; \overline{OM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ معناه}$$

معناه $\|\overline{OM'}\| = 2\|\overline{OM}\|$ ومنه: المثلث OMM' قائم في O

ب/ تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من

$$\overline{AM}(x - 1; y + 1), \overline{AM}(z - z_A): \overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$$

$$\overline{AM'}(-2y - 1; 2x + 1) \text{ أي } \overline{AM'}(z' - z_A) \text{ و } \overline{AM'}(2iz - z_A)$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0 \text{ معناه } (x - 1)(-2y - 1) + (y + 1)(2x + 1) = 0$$

$$\text{معناه } x + 3y + 2 = 0$$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x + 3y + 2 = 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(1) */ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

$$f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = x - e + \ln\left(\frac{e^{2(x-e)} + 2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$= x - e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) - \ln(e^{2(x-e)}) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ حساب النهايات}$$

ج/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = \frac{1 - 2e^{-2(x-e)}}{1 + 2e^{-2(x-e)}}: \mathbb{R} \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

$$x = e + \ln \sqrt{2} \text{ معناه } 1 - 2e^{-2(x-e)} = 0 \text{ معناه } f'(x) = 0$$

x	$-\infty$	$e + \ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+

الدالة f متزايدة تماماً على $[e + \ln \sqrt{2}; +\infty[$

الدالة f متناقصة تماماً على $] -\infty; e + \ln \sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	$\ln 2/2 + e$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$3\ln 2/2 + e$	$+\infty$

(2) *أ/ نبيين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y = -x + \ln 2 + e$ و $y = x - e$ عند $+\infty$

وعند $-\infty$ **على الترتيب:** بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + e + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2] = 0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

***ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')**

$$\text{لدينا: } f(x) - (x - e) = \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$\ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) > \ln 1 = 0 \text{ معناه } 1 + 2e^{-2(x-e)} > 1$$

ومنه: $f(x) - (x - e) > 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

$$\text{لدينا: } f(x) - (-x + e + \ln 2) = \ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2$$

$$2 + e^{2(x-e)} > 2 \text{ معناه } \ln(2 + e^{2(x-e)}) > \ln 2 \text{ ومنه:}$$

$$f(x) - (-x + e + \ln 2) > 0 \text{ إذن } (C_f) \text{ يقع فوق م.م } (D')$$

من أجل كل عدد حقيقي x

***ج/ نبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$**

هو محور تناظر للمنحنى (C_f) :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2\left(\frac{\ln 2}{2} + e\right) - x$ من $\mathbb{R}$ ، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln 2}{2} + e\right) - x\right) = f(\ln 2 + 2e - x)$$

$$= -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) = f(x)$$

ومنه: $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

(3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) :

(4) *أ/ نبيين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة

$$(D_m): y = mx - m\left(e + \frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2} : A\left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2}\right)$$

حيث m وسيط حقيقي.

$$\text{معناه } y = mx - m\left(e + \frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{معناه } m\left(x - e - \frac{\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2} - y = 0$$

$$x - e - \frac{\ln 2}{2} = 0 \text{ و } \frac{\ln 2}{2} - y = 0 \text{ ومنه: جميع المستقيمات}$$

$$(D_m) \text{ تشمل النقطة الثابتة } A\left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2}\right)$$

***ب/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط**

تقاطع المستقيم (D_m) والمنحنى (C_f) :

$$\text{المستقيم } (D_m) \text{ يدور حول النقطة الثابتة } A\left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2}\right)$$

إذا كان $m = 1$ فإن (D_m) هو (D) لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = -1$ فإن (D_m) هو (D') لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = 0$ فإن (D_m) هو $(D_0): y = \ln \sqrt{2}$ لا توجد نقط

تقاطع

إذا كان $m \in]-1; 1[$ فإنه لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

(5) *أ/ التفسير الهندسي العدد I : هو مساحة الحيز المستوي

المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين

$$\text{الذين معادلتيهما } x = \ln \sqrt{3} + e, x = \ln \sqrt{2} + e$$

$$\text{حساب العدد } I_1: I_1 = \int_0^1 \ln(1+X) dX \text{ بالمكاملة بالتجزئة}$$

$$\text{بوضع: } u'(X) = \frac{1}{1+X}, u(X) = \ln(1+X)$$

$$v(X) = X, v'(X) = 1$$

$$I_1 = [X \ln(1+X)]_0^1 - \int_0^1 \frac{X+1-1}{X+1} dX$$

$$= [X \ln(1+X)]_0^1 - \int_0^1 1 dX + \int_0^1 \frac{1}{X+1} dX$$

$$= [X \ln(1+X) - X + \ln(1+X)]_0^1 = \ln 4 - 1$$

$$\text{*ب/ نبيين أن } 0 \leq I_n \leq \ln 2: \text{ لدينا } I_n = \int_0^1 \ln(1+X^n) dX$$

$$0 \leq \ln(X^n + 1) \leq \ln 2 \text{ معناه } 1 \leq X^n + 1 \leq 2$$

$$\text{ومنه: } 0 \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX \leq \int_0^1 \ln 2 dX \text{ إذن } 0 \leq I_n \leq \ln 2$$

***ج/ تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:**

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases} \text{ بضرب أطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد}$$

(6) باستعمال: $\ln(1+X) \leq X$ ، من أجل كل $X \in]0; +\infty[$

/* استنتاج أن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \leq X$ ، من أجل كل $X \in]0; +\infty[$

لدينا: $1 + 2e^{-2(x-e)} > 0$ بوضع: $X = 1 + 2e^{-2(x-e)}$ نجد:
وبالتالي $0 \leq \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) \leq 2e^{-2(x-e)}$

$$0 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) dx \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx$$

ومنه: $0 \leq -1 + \ln 4 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

اذن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

ب* اعطاء محصر العدد $I + I_1$

$$0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx = - \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} -2e^{-2(x-e)} dx = - \left[e^{-2(x-e)} \right]_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} = \frac{1}{6}$$

ومنه: $0 \leq I + I_1 \leq \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$$0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1) \text{ أي } n \in \mathbb{N}^*$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}^*$

بما أن (I_n) محدودة من الأسفل بالصفر $(0 \leq I_n \leq \ln 2)$

ومتناقصة تماماً فإنها متقاربة نحو الصفر

ج* تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases} \text{ بضرب أطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد}$$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$$0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1) \text{ أي } n \in \mathbb{N}^*$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}^*$

بما أن (I_n) محدودة من الأسفل بالصفر $(0 \leq I_n \leq \ln 2)$

ومتناقصة تماماً فإنها متقاربة نحو الصفر

3 رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) .

