الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الشلف

ثانوية: العقيد لطفي -بوقادير-

امتحان بكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — دورة ماي 2019

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على سبع كريات منها ثلاث كريات تحمل الرقم 2 و أربع كريات تحمل الرقم 3 و يحتوي كيس U_2 على سبع كريات منها أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات حمراء (نعتبر كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

1) نسحب من الكيس U_2 كرتين بالتتابع دون ارجاع الكرة المسحوبة

أ) احسب احتمال الحوادث الآتية :

A " الحصول على كرتين من نفس اللون "

B " الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل "

2) نسحب كرة واحدة من الكيس U_1 : اذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2 نسحب كرتين من الكيس U_2 بالتتابع دون ارجاع و اذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 3 نسحب ثلاث كرات من الكيس U_2 في آن واحد

نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الكرات الحمراء المسحوبة

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) بين أن $E(X=1)=\frac{132}{245}$ و $E(X=2)=\frac{63}{245}$

ت) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $(z-4)(z^2-4z+8)=0$.

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=2-2i$ ، $z_B=2+2i$ ، $z_C=4$ و $z_D=-z_A$

أ) أكتب z_A و z_B على شكل أسي

ب) أكتب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على شكل أسي ، استنتج طبيعة المثلث ABC

ج) تحقق أن $z_D=z_A+2(z_B-z_C)$ ، ماذا تستنتج ؟

د) بين أن (DA) يوازي (CB)

3) نعتبر التحويل النقطي S الذي مركزه A و يحول B إلى C

أ) عيّن طبيعة التحويل S و حدد عناصره المميزة .

4) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $Arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$

أ) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ)

ب) عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة

ج) عيّن طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S ، محددا عناصرها المميزة

3as.ency-education.com

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x+6}{x+3}$.

أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

2. نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<3$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ت) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. أحسب S_n بدلالة n حيث : $S_n=\dfrac{5}{u_0+2}+\dfrac{5}{u_1+2}+\dfrac{5}{u_2+2}+...+\dfrac{5}{u_n+2}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+4xe^{2x}$

-1 ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

-2 بين أن $g(x)>0$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+1+(2x-1)e^{2x}$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2. أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ) بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D).

ج) بين المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازي للمستقيم (D) يطلب تعيين معادلة له .

4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I طلب تعيين احداثياتها

5. أنشئ المماس (T) و (D) و المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;1]$

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(2x-1)e^{2x}=m-1$.

7. أ) باستعمال مكاملة بالتجزئة بين أن $\int_0^1(2x-1)e^{2x}dx=1$

ب) احسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$

3as.ency-education.com

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1,2,-1)$, $B(-3,-2,3)$, $C(0,-2,-3)$

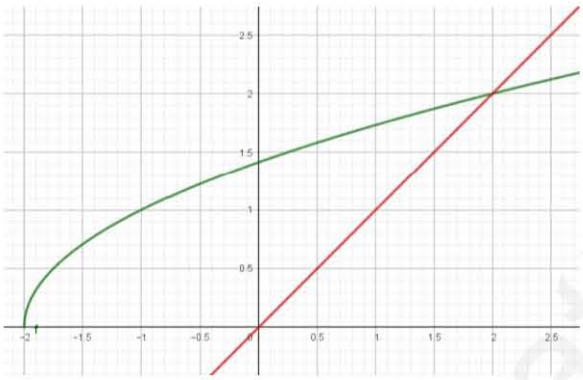
و ليكن (P) المستوي ذو المعادلة الديكارتية : $x+y-z+2=0$

1. أثبت أن النقط A , B , C تعين مستو يطلب تعيين معادلة له .
2. أثبت أن المستويين (ABC) و (P) متعامدين .
3. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (ABC) و (P)
4. عين احداثيات H المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P)
5. احسب المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ)
6. لتكن G مرجح الجملة المثقلة التالية : $\{(A,1);(B,-1);(C,2)\}$.

أ) عين احداثيات النقطة G .

7. عين طبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (S) للنقط M من الفضاء حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=4$

التمرين الثاني : (04 نقاط)



1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}$.

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2,+\infty[$.

ب) انقل التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0 , u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل .

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<2$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+u_n+2}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

د) استنتج أن (u_n) متقاربة .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<2-u_{n+1}<\frac{1}{2}(2-u_n)$.

ب) استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<2-u_n<3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

ج) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3as.ency-education.com

التمرين الثالث : (05 نقاط)

) أ) عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب z حيث $z=-3+12i\sqrt{3}$.

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_D=-3-2i\sqrt{3}$ و $z_E=\overline{z_D}$

أ) بيّن أن النقط B ، C و E تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها A يطلب تعيين نصف قطرها .

ب) بين أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .

ت) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)^n$ حقيقي سالب

3) بيّن أنه يوجد دوران r مركزه B ويحول النقطة E إلى C ، يطلب تعيين زوايته .

4) اكتب العبارة المركبة للدوران r

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $\left|\overline{z}+3+2i\sqrt{3}\right|=\left|z_B\right|$.

أ) عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالدوران r محددا عناصرها المميزة

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I)لتكن الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x+1-2\ln x$

1. احسب نهايتي الدالة g
2. ادرس اتجاه تغيرات الدالة g على $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\ln x-(\ln x)^2$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

ب) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. بين انه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. ادرس إشارة العبارة $\ln x-(\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$
5. استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=x$
6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $0,6<\alpha<0,7$
7. أنشئ المستقيم (Δ) المنحنى (C_f)

III) نضع $I=\int_1^e \ln(x)\,dx$ و $J=\int_1^e (\ln(x))^2\,dx$

أ) بين باستعمال التكامل بالتجزئة أن : $J=e-2I$

ب) تحقق أن الدالة $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

ب) استنتج مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$

نتمنى لكم النجاح في امتحان البكالوريا 2019

3as.ency-education.com

تصحيح بكالوريا تجريبي دورة ماي 2019
شعبة علوم تجريبية.

الموضوع الأول.

التمرين الأول.

U_1 به 7 كرات { ثلاثة تحمل الرقم 2 / أربعة تحمل الرقم 3

U_2 به 7 كرات { أربعة بيضاء / ثلاثة حمراء.

نسحب كريتين من U_2 بالتتابع دون إرجاع

A "الحصول على كريتين من نفس اللون"

$$P(A) = \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{3}{7}$$ $P(A) = \frac{3}{7}$

B "الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل"

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{A_4^2}{A_7^2} = \frac{5}{7}$$ $P(B) = \frac{5}{7}$

حيث $\bar{B}$ عدم الحصول على كرة حمراء"

② قيم المتغير العشوائي X،

- سحب رقم 2 من U_1 وسحب كريتين بيضاوتين من U_2 قيمة X هي $x_1 = 0$
- سحب رقم 3 من U_1 وسحب ثلاث كرات بيضاء من U_2 قيمة X هي $x = 0$
- سحب رقم 2 من U_1 وسحب كرة حمراء وكرة بيضاء من U_2 قيمة X هي $x = 1$
- سحب رقم 3 من U_1 وسحب كرة حمراء وكريتين بيضاوتين من U_2 قيمة X هي $x = 1$
- سحب رقم 2 من U_1 وسحب كريتين حمراوتين من U_2 قيمة X هي $x = 2$
- سحب رقم 3 من U_1 وسحب كريتين حمراوتين وكرة بيضاء من U_2 قيمة X هي $x = 2$
- سحب رقم 3 من U_1 وسحب ثلاث كرات حمراء من U_2 قيمة X هي $x = 3$

ومنه قيم المتغير العشوائي التي هي x_i:

$x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$

تبين أن $P(X=2) = \frac{63}{245}$ ، $P(X=1) = \frac{132}{245}$

$$P(X=1) = \frac{3}{7} \times \frac{2(A_3^1 \times A_4^1)}{A_7^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_3^1 \times C_4^2}{C_7^3}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{24}{42} + \frac{4}{7} \times \frac{18}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{132}{245}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{7} \times \frac{A_3^2}{A_7^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_3^2 \times C_4^1}{C_7^3}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{6}{42} + \frac{4}{7} \times \frac{3 \times 4}{35}$$

$$= \frac{3}{42} + \frac{48}{245}$$

$$P(X=2) = \frac{63}{245}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{7} \times \frac{C_3^3}{C_7^3}$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{1}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{245}$$

$$P(X=0) = \frac{3}{7} \times \frac{A_4^2}{A_7^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_4^3}{C_7^3}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{12}{42} + \frac{4}{7} \times \frac{4}{35}$$

$$= \frac{6}{49} + \frac{16}{245}$$

$$P(X=0) = \frac{46}{245}$$

3as.ency-education.com

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{46}{245}$	$\frac{132}{245}$	$\frac{63}{245}$	$\frac{4}{245}$

الأمل الرياضياتي

$$E(x)=0\left(\frac{46}{245}\right)+1\left(\frac{132}{245}\right)+2\left(\frac{63}{245}\right)+3\left(\frac{4}{245}\right)$$

$$=\frac{270}{245}$$

$$\boxed{E(x)=\frac{54}{49}}$$

التمرين الثاني :

حل المعادلة

$(z-4)(z^2-4z+8)=0$ تكافئ

$(z^2-4z+8=0)$ أو $(z-4=0)$

$\boxed{z=4}$ معناه $z-4=0$

حل المعادلة $z^2-4z+8=0$

حساب المميز Δ : $\Delta=(-4)^2-4(1)(8)$

$=16-32$

$\Delta=-16$

$\Delta<0$ ومنه المعادلة تقبل حلين $\mathbb{C}$ في

$z_1=\frac{4-4i}{2}=\boxed{2-2i}$

$z_2=\frac{4+4i}{2}=\boxed{2+2i}$

حلول المعادلة هي

$S=\{4;\ 2+2i;\ 2-2i\}$.

كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي.

نعين طويلة وعمدة z_A

$|z_A|=|2-2i|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

ومنه $Arg(z_A)=\theta$

$\begin{cases}\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

ومنه $Arg(z_A)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

إذن الشكل الأسي لـ z_A هو

$$\boxed{z_A=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

كتابة z_B على الشكل الأسي

$$\boxed{z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

ب- كتابة $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي.

$$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{4-(2-2i)}{4-(2+2i)}$$

$$=\frac{4-2+2i}{4-2-2i}$$

$$=\frac{2+2i}{2-2i}$$

$$=\frac{(2+2i)(2+2i)}{2^2+2^2}$$

$$=\frac{4+4i+4i-4}{8}$$

$$=\frac{8i}{8}$$

$$\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=i}$$

لدينا $|i|=1$ ، $Arg(i)=\frac{\pi}{2}$

ومنه

$$\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

طبيعة المثلث ABC

لدينا $\left|\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right|=\frac{|z_C-z_A|}{|z_C-z_B|}=\frac{AC}{AB}=1$

ومنه $\boxed{AC=AB}$

ومنه $Arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)=Arg(i)$ ،

$(\vec{BC},\vec{AC})=\frac{\pi}{2}$

ومنه ABC قائم في C ومتساوي الساقين

$$\begin{cases}(\vec{BC},\vec{AC})=\frac{\pi}{2}\\ BC=AC\end{cases}$$

3as.ency-education.com

ج) التحقق أن $z_D = z_A + 2(z_B - z_C)$

لدينا $z_A + 2(z_B - z_C) = 2 - 2i + 2(2+2i-4)$

$= 2 - 2i + 2(-2+2i)$

$= 2 - 2i - 4 + 4i$

$= -2 + 2i$

$= z_D$

إذن $z_D = z_A + 2(z_B - z_C)$

$\boxed{z_D = z_A + 2z_B - 2z_C}$

ومنه z_D هي لاحقة النقطة D من الحالة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$

- تبين أن $(CB)//(DA)$

لدينا $z_D = z_A + 2(z_B - z_C)$

أي $z_D - z_A = 2(z_B - z_C)$

ومنه $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CB}$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطان خطيا وعليه ABC مثلث فإن $(AD)//(CB)$

③ تعيين طبيعة S

$S(A) = A$ و $S(B) = C$ معناه $z_A = az_A + b$ ① و $z_C = az_B + b$ ②

بالطرح نجد

$z_C - z_A = a(z_B - z_A)$

ومنه

$a = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$= \dfrac{4 - (2-2i)}{2+2i-(2-2i)}$

$= \dfrac{4-2+2i}{2+2i-2+2i}$

$= \dfrac{2+2i}{4i}$

$= \dfrac{(2+2i)(-4i)}{16}$

ومنه

$a = \dfrac{-8i+8}{16}$

$\boxed{a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

لدينا $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ، $|a| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$

ومنه S تشابه مباشر مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$

وزاويته $\text{Arg}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{4}$

④ تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث

$\text{Arg}\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

أ- التحقق أن $C \in (\Gamma)$

لدينا من السؤال (ب):

$\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

أي أن $\text{Arg}\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ومنه $C \in (\Gamma)$

- تعيين طبيعة (Γ)

$\text{Arg}\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

ومنه $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أي $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن (Γ) هي نصف دائرة قطرها [AB] ماعدا A و B والتي تشمل C.

ج) تعيين طبيعة (Γ')

(Γ') صورة (Γ) بواسطة S

بما أن $S(A) = A$ و $S(B) = C$ فإن (Γ') هي نصف دائرة قطرها [AC] ماعدا A و C حيث $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}$

3as.ency-education.com

التمرين الثالث :

$f(x)=\dfrac{4x+6}{x+3}$

- دراسة إتجاه تغيرات f على $[0,+\infty[$

المشتقة : f قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$

ولدينا $f'(x)=\dfrac{4(x+3)-(4x+6)}{(x+3)^2}$

$$f'(x)=\frac{6}{(x+3)^2}$$

ومنه $f'(x)>0$ دالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

② $U_0=0$ ، $U_{n+1}=f(U_n)$

- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي $0\leq U_n<3$

أ) التحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$

لدينا $U_0=0$ و $0<3$ أي $0\leq U_0<3$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

ب) نفرض صحة الخاصية من أجل n كيفي

أي $0\leq U_n<3$

ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$

أي نبرهن أن $0\leq U_{n+1}<3$.

- لدينا $0\leq U_n<3$

و f دالة متزايدة على $[0,+\infty[$ ومنه

$f(0)\leq f(U_n)<f(3)$

لدينا $f(0)=2\geq 0$ و $f(3)=3$

إذن $\boxed{0\leq U_{n+1}<3}$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

الخلاصة :

من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq U_n<3$.

ب) دراسة إتجاه تغير (U_n)

$U_{n+1}-U_n=\dfrac{4U_n+6}{U_n+3}-U_n$

$=\dfrac{4U_n+6-U_n^2-3U_n}{U_n+3}$

$U_{n+1}-U_n=\dfrac{-U_n^2+U_n+6}{U_n+3}$

دراسة إشارة $(-U_n^2+U_n+6)$ لما $U_n=X$

حساب Δ : $\Delta=1^2-4(6)(-1)$

$\boxed{\Delta=25}$

ومنه $X_1=\dfrac{-1-5}{-2}=3$

$X_2=\dfrac{-1+5}{-2}=-2$

X	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$-X^2+X+6$		$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$

بما أن $0<U_n<3$ فإن $-U_n^2+U_n+6>0$

ومنه $U_{n+1}-U_n>0$ إذن (U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

- التقارب :

لدينا (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى $U_n<3$ فهي متقاربة.

② $V_n=\dfrac{U_n-3}{U_n+2}$

- نبين أن (V_n) هندسية :

$V_{n+1}=\dfrac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}+2}$

$=\dfrac{\frac{4U_n+6}{U_n+3}-3}{\frac{4U_n+6}{U_n+3}+2}$

$=\dfrac{4U_n+6-3U_n-9}{4U_n+6+2U_n+6}$

$=\dfrac{U_n-3}{6U_n+12}$

$=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{U_n-3}{U_n+2}\right)$

$\boxed{V_{n+1}=\frac{1}{6}V_n}$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$

وحدها الأول $V_0=\dfrac{-3}{2}$

3as.ency-education.com

عبارة V_n بدلالة n:

$$V_n = \frac{-3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- استنتاج عبارة U_n بدلالة n.

لدينا $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 2}$ ومنه $V_n(U_n+2) = (U_n-3)$

أي $V_nU_n + 2V_n = U_n - 3$

ومنه $V_nU_n - U_n = -2V_n - 3$

أي $U_n(V_n - 1) = -2V_n - 3$

إذن $U_n = \frac{-2V_n - 3}{V_n - 1}$

$$U_n = \frac{3\left(\frac{1}{6}\right)^n - 3}{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 1}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\left(\frac{1}{6}\right)^n - 3}{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 1} = 3$$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

- حساب S_n:

$$S_n = \frac{5}{U_0+2} + \frac{5}{U_1+2} + \frac{5}{U_2+2} + \dots + \frac{5}{U_n+2}$$

لدينا $V_n = \frac{U_n+3}{U_n+2}$ أي $V_n = \frac{U_n+2-5}{U_n+2}$

$= \frac{U_n+2}{U_n+2} - \frac{5}{U_n+2}$

ومنه $V_n = 1 - \frac{5}{U_n+2}$

أي $V_n - 1 = -\frac{5}{U_n+2}$

إذن $\frac{5}{U_n+2} = 1 - V_n$

ومنه

$S_n = 1 - V_0 + 1 - V_1 + 1 - V_2 + \dots + 1 - V_n$

$= (1+1+1+\dots+1) - (V_0 + V_1 + \dots + V_n)$

$= n+1 - \left(V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right)$

ومنه

$$S_n = n+1 - \left(-\frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{6}}\right)\right)$$

$$= n+1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{\frac{5}{6}}\right)$$

$$S_n = n+1 + \frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)$$

التمرين الرابع:

$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$ (I

1. دراسة اتجاه تغيرات الدالة g:

- المشتقة:

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$g'(x) = 4e^{2x} + 2e^{2x}(4x)$

$= (4 + 8x)e^{2x}$

$g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x+1)$ ($e^{2x} > 0$ لأن)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$1-\frac{2}{e}$	↗

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

بما أن القيمة الحدية الصغرى $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

فإن $g(x) > 0$ على $\mathbb{R}$.

$f(x) = x + 1 + (2x-1)e^{2x}$ (II

1. حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1+(2x-1)e^{2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1+(2x-1)e^{2x} = -\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x} = 0$

3as-ency-education.com

2. التحقق أن $f'(x) = g(x)$

f دالة قابلة للإشتقاق على $]-\infty, +\infty[$

ولدينا:

$$f'(x) = 1 + 2e^{2x} + 2e^{2x}(2x-1)$$
$$= 1 + 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x}$$
$$f'(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

ومنه $f'(x) = g(x)$

- إستنتاج إشارة $f'(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

لما $g(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

ب) - بين أن $(D): y = x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $(-\infty)$

لدينا $f(x) - (x+1) = (2x+1)e^{2x}$

و $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1)e^{2x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^{2x} + e^{2x}$

$= 0$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

- دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) مع (D)

لدراسة إشارة الفرق

$f(x) - (x+1)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(2x+1)$		$-$	ϕ	$+$	
e^{2x}		$+$		$+$	
$(2x-1)e^{2x}$		$-$	ϕ	$+$	
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (D)		(C_f) يقطع (D)		(C_f) فوق (D)

$(C_f) \cap (D) = \left\{A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

ج) نبين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D)

$f'(x_0) = 1$ معناه $(T) // (D)$

$f'(x) = 1$ معناه $g(x) = 1$

$1 + 4xe^{2x} = 1$ أي

$4xe^{2x} = 0$ أي

$\boxed{x = 0}$ أي

كتابة معادلة المماس عند النقطة $x = 0$

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$(T): y = x$

4 - نبين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف

لدينا $f''(x) = g'(x)$

و

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	ϕ	$+$	

f'' تنعدم عند $x = -\frac{1}{2}$ وتغير إشارتها.

ومنه النقطة $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 2e^{-1}\right)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

ency-education.com
3as.ency-education.com

7. بيّن أن $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = 1$

نضع $\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}(2-1)e^2\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)e^0\right) - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = 1$$

7- حساب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) والمماس (T) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

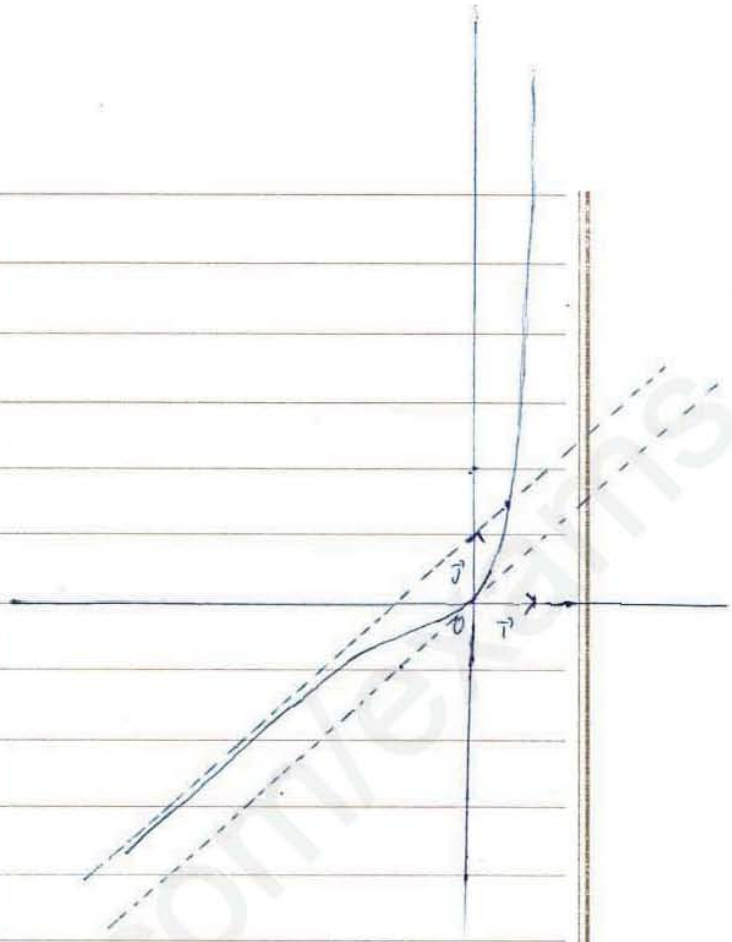
$$A = \int_0^1 f(x) - x\,dx = \int_0^1 (2x-1)e^{2x} + 1\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx + \int_0^1 1\,dx$$

$$= 1 + [x]_0^1$$

$$= 1 + 1$$

$$A = 2\,cm^2$$



المناقشة البيانية،

$(2x-1)e^{2x} = m-1$

ومنه $(2x-1)e^{2x} + 1 = m$

إذن $(2x-1)e^{2x} + 1 + x = x + m$

ومنه $f(x) = x + m$ .... $(*)$

حلول المعادلة $(*)$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات (Δ_m)

(Δ_m): $y = m+1$ الموازية لـ (D) و (T)

من أجل $m \in]-\infty, 0[$ المعادلة $(*)$ لا تقبل حلول

من أجل $m = 0$ المعادلة $(*)$ تقبل حل وحيد

من أجل $m \in]0, 1[$ المعادلة $(*)$ تقبل حلين متمايزين

من أجل $m \in [1, +\infty[$ المعادلة $(*)$ تقبل حل وحيد

3as.ency-education.com

الموضوع الثاني :

التمرين الأول :

إثبات أن النقط تعين مستو

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}-4\\-4\\4\end{pmatrix}$ ، $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-2\end{pmatrix}$

$\frac{-4}{-1} \neq \frac{-4}{-4}$

ومنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{AB}=k\vec{AC}$

إذن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A, B, C ليست على استقامة فهي تعين مستو.

- تعيين معادلة ديكارتية لـ (ABC)

نضع $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

معناه $\begin{cases}\vec{n}.\vec{AB}=0\\ \vec{n}.\vec{AC}=0\end{cases}$

أي $\begin{cases}-4a-4b+4c=0 \quad ...①\\ -a-4b-2c=0 \quad ...②\end{cases}$

بطرح ② من ① نجد

$-3a+6c=0$

أي $-3a=-6c$

ومنه $\boxed{a=2c}$

بوضع $\boxed{c=1}$ نجد $\boxed{a=2}$

بالتعويض في ② نجد

$-2-4b-2=0$

أي $-4-4b=0$ ومنه $\boxed{b=-1}$

ومنه $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

ومنه معادلة الديكارتية لـ (ABC) من الشكل

$2x-y+z+d=0$

تعيين قيمة d :

لدينا $C(0,-2,-3)\in(ABC)$

معناه $2-3+d=0$ أي $d=1$

ومنه المعادلة الديكارتية لـ (ABC) هي

$(ABC): 2x-y+z+1=0$

2- تبين أن (ABC) و (P) متعامدان

لدينا $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ناظمي لـ (ABC)

و $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ناظمي لـ (P)

$\vec{n}.\vec{n'}=2(1)+(-1)(1)+1(-1)=0$

ومنه $\vec{n}$ يعامد $\vec{n'}$ إذن (ABC) يعامد (P)

3- تعيين تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC)

$(\Delta): \begin{cases}2x-y+z+1=0 \quad ...①\\ x+y-z+2=0 \quad ...②\end{cases}$

بجمع ① و ② نجد $3x+3=0$ أي $\boxed{x=-1}$

بالتعويض في ① نجد

$-2-y+z+1=0$

أي $-1-y+z=0$

بوضع $\boxed{z=t}$ نجد $-1-y+t=0$

أي $\boxed{y=t-1}$

ومنه التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو

$(\Delta): \begin{cases}x=-1\\ y=t-1\\ z=t\end{cases} \quad ; t\in\mathbb{R}$

- تعيين إحداثيات H المسقط العمودي لـ (C) على (P).

أولا" تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (D) العمودي على (P) والذي يشمل C

بما أن (D) عمودي على (P) فإن $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ يعتبر شعاع توجيه لـ (D) ومنه التمثيل الوسيطي لـ (D) هو :

$(D): \begin{cases}x=\alpha\\ y=\alpha-2\\ z=-\alpha-3\end{cases} \quad ,\alpha\in\mathbb{R}$

3as.ency-education.com

حيث تقاطع (D) مع (P)

لتكن $M(\alpha, \alpha-2, -\alpha-3)$ نقطة من (D)

$M \in (P)$ معناه

$\alpha + \alpha - 2 - (-\alpha - 3) + 2 = 0$

أي $3\alpha + 3 = 0$

إذن $\boxed{\alpha = -1}$

ومنه إحداثيات H المسقط العمودي لـ C على (P) هي

$H(-1, -3, -2)$

- حساب المسافة بين C و (Δ)

بما أن (P) يعامد (ABC) و (Δ) فإن تقاطعهما

$d(C, (\Delta)) = d(C, (P)) = CH$

$d(C, (P)) = \frac{|1 - 2 - (-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$CH = \sqrt{(-1)^2 + (-3+2)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{3}$

ومنه $d(A, (\Delta)) = \sqrt{3}$

6- تعيين إحداثيات G مرجح الجملة $\{(A,1), (B,-1), (C,2)\}$.

$x_G = \frac{x_A - x_B + 2x_C}{2} = \frac{1 - 3 + 2(0)}{2} = -1$

$y_G = \frac{y_A - y_B + 2y_C}{2} = \frac{2 + 2 + 2(-2)}{2} = 0$

$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = \frac{-1 - 3 + 2(-3)}{2} = -5$

إذن

$G(-1, 0, -5)$

7- تعيين طبيعة (S):

$(S): \|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4$

لدينا G مرجح الجملة

$\{(A,1), (B,-1), (C,2)\}$.

ومنه حسب الخاصية المميزة لمرجح ثلاث نقط

$\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = 2\vec{MG}$

أي $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|2\vec{MG}\|$

إذن $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2MG$

ومنه $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4$

تكافئ $2MG = 4$

أي $MG = 2$

ومنه (S) هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 2.

التمرين الثاني:

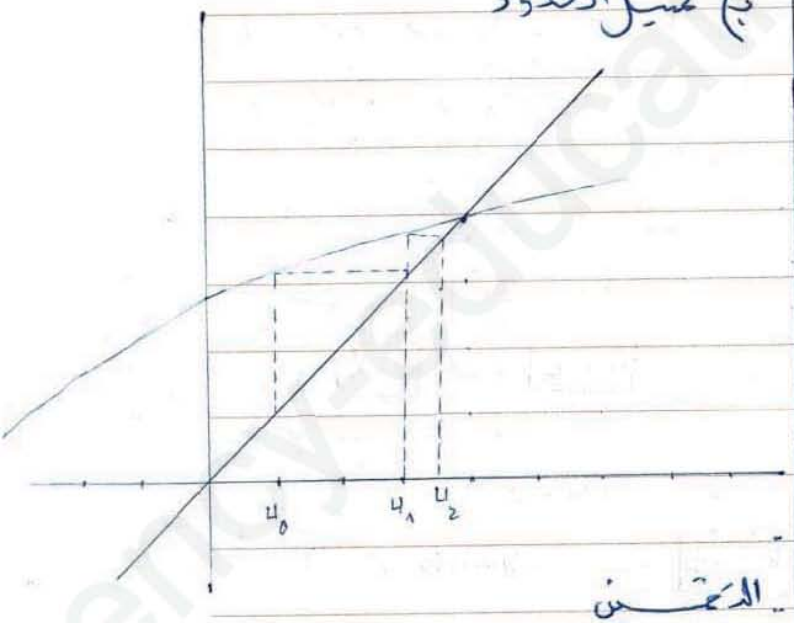
1) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[-2, +\infty[$

لدينا f دالة قابلة للاشتقاق على $]-2, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$

ومنه f دالة متزايدة تماما على $[-2, +\infty[$

2) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 بيانيا



التخمين

لدينا $u_0 < u_1 < u_2$ ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومتقاربة نحو 2

3) نضع

$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

3as.ency-education.com

- البرهان بالتراجع أن $0 < U_n < 2$

- لدينا : التحقق من أجل $n=0$:

لدينا $U_0 = \frac{1}{2}$ و $0 < \frac{1}{2} < 2$

إذن $0 < U_0 < 2$ محققة

نفرض صحة الخاصية من أجل n نعني أن $0 < U_n < 2$

ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي أن $0 < U_{n+1} < 2$

لدينا $0 < U_n < 2$ و f دالة متزايدة على $I = [-2, +\infty[$ ومنه

$f(0) < f(U_n) < f(2)$

أي $\sqrt{2} < U_{n+1} < 2$

بما أن $0 < \sqrt{2}$ فإن $0 < U_{n+1} < 2$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

الخلاصة :

من أجل كل n طبيعي : $0 < U_n < 2$.

ج) تبين أن $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{\sqrt{U_n+2} + U_n}$

لدينا $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n+2} - U_n$

$= \frac{(\sqrt{U_n+2} - U_n)(\sqrt{U_n+2} + U_n)}{\sqrt{U_n+2} + U_n}$

$= \frac{(\sqrt{U_n+2})^2 - U_n^2}{\sqrt{U_n+2} + U_n}$

$= \frac{U_n + 2 - U_n^2}{\sqrt{U_n+2} + U_n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{\sqrt{U_n+2} + U_n}$

دراسة إشارة (U_n)

دراسة إشارة $(-U_n^2 + U_n + 2)$

نضع $X = U_n$ نجد $-X^2 + X + 2$

حساب Δ :

$\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9$

ومنه

$X_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2$

$X_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$

X	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-X^2+X+2$		$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$	

بما أن $0 < U_n < 2$ فإن $-U_n^2 + U_n + 2 > 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n > 0$ إذن (U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

برهنة تقارب (U_n)

لدينا (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى $(U_n < 2)$ فهي متقاربة.

3- تبين أن $0 < 2 - U_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - U_n)$

لدينا $0 < U_{n+1} < 2$ ومنه $2 - U_{n+1} > 0$

لدينا $2 - U_{n+1} = 2 - \sqrt{U_n+2}$

$= \frac{(2 - \sqrt{U_n+2})(2 + \sqrt{U_n+2})}{(2 + \sqrt{U_n+2})}$

$= \frac{4 - (U_n+2)}{2 + \sqrt{U_n+2}}$

$= \frac{4 - U_n - 2}{2 + \sqrt{U_n+2}}$

$2 - U_{n+1} = \frac{2 - U_n}{2 + \sqrt{U_n+2}}$

لدينا $\sqrt{U_n+2} > 0$ ومنه $U_{n+1} > 0$

أن $2 + \sqrt{U_n+2} > 2$

ومنه $\frac{1}{2+\sqrt{U_n+2}} < \frac{1}{2}$

بما أن $2 - U_n > 0$ فإن $U_n < 2$ إذن

$\frac{1(2-U_n)}{2+\sqrt{U_n+2}} < \frac{1}{2}(2 - U_n)$

أي $\boxed{0 < 2 - U_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - U_n)}$

3as.ency-education.com

باستنتاج أن $0 < 2 - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $0 < 2 - U_n < \frac{1}{2}(2 - U_{n-1})$

و $(2 - U_{n-1}) < \frac{1}{2}(2 - U_{n-2})$

$\vdots$

$(2 - U_1) < \frac{1}{2}(2 - U_0)$

ومنه $0 < 2 - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - U_0)$

أي $0 < 2 - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 - \frac{1}{2}\right)$

$0 < 2 - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)$

$0 < 2 - U_n < 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

باستنتاج $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

لدينا $0 < 2 - U_n < 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 < \lim\limits_{n \to +\infty} (2 - U_n) < \lim\limits_{n \to +\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

أي $0 < \lim\limits_{n \to +\infty} (2 - U_n) < 0$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - U_n = 0$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$

التمرين ③ :

① تعيين الجذرين التربيعيين لـ :

$Z = -3 + 12i\sqrt{3}$

نضع $w = x + iy$ جذر لـ Z يعني

$w^2 = Z$

لدينا $w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$|w^2| = |w|^2 = x^2 + y^2$

$|Z| = \sqrt{(-3)^2 + (12\sqrt{3})^2} = 21$

يعني $w^2 = Z$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 21 & -(1) \\ x^2 - y^2 = -3 & -(2) \\ 2xy = 12\sqrt{3} & -(3) \end{cases}$$

مع ② نجد ① أي

$2x^2 = 18$

أي $x^2 = 9$

ومنه إما $x = 3$ أو $x = -3$

من أجل $x = 3$ بالتعويض في ③ نجد

$2(3)y = 12\sqrt{3}$

أي $y = 2\sqrt{3}$

من أجل $x = -3$ نجد $2(-3)y = 12\sqrt{3}$

ومنه $y = -2\sqrt{3}$

إذن الجذران التربيعيان لـ $Z = -3 + 12i\sqrt{3}$ هما

$w_1 = 3 + 2\sqrt{3}i$ و $w_2 = -3 - 2\sqrt{3}i$

- نبين أن B ، C ، E تنتمي إلى دائرة مركزها A

لدينا $Z_A = \sqrt{3}i$ ، $Z_B = -\sqrt{3}i$

$AB = |Z_B - Z_A| = |-\sqrt{3}i - \sqrt{3}i| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$

$AC = |Z_C - Z_A| = |3 + 2i\sqrt{3} - \sqrt{3}i| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2}$

$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\boxed{AC = 2\sqrt{3}}$

$AE = |-3 + 2i\sqrt{3} - \sqrt{3}i| = |-3 + i\sqrt{3}|$

$= \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2}$

$= \sqrt{12}$

$AE = 2\sqrt{3}$

لدينا $AB = AC = AE = 2\sqrt{3}$

ومنه B ، C ، E تنتمي إلى دائرة مركزها A

ونصف قطرها $r = 2\sqrt{3}$

- نبين أن $\frac{Z_C - Z_B}{Z_E - Z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\frac{Z_C - Z_B}{Z_E - Z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}$

$= \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}}$

$= \frac{3(1 + i\sqrt{3})}{3(-1 + i\sqrt{3})}$

$= \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}}$

3as.emdy-education.com

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{-1-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{4}$$

$$= \frac{2-2i\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

نضع $\theta = Arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ومنه $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

إذن

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

- نعين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n$ حقيقي سالب

$\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n$ حقيقي سالب معناه

$Arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n = \pi + 2k\pi$

أي $Arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = \pi + 2k\pi$

ومنه $Arg\left(e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right) = \pi + 2k\pi$

إذن $\frac{-n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$

$$n = -3 - 6k$$

مع k عدد صحيح نسبي سالب غير معدوم

بين أنه يوجد دوران يحول E إلى C ومركزه B.

$$\begin{cases} z_B = a z_B + b \\ z_C = a z_E + b \end{cases}$$ معناه $$\begin{cases} r(B) = B \\ r(E) = C \end{cases}$$

بالطرح نجد $z_C - z_B = a(z_E - z_B)$

إذن $a = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$

$$a = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

بما أن $|a| = 1$ فإن r دوران زاويته $-\frac{\pi}{3}$

نعين عبارته المركبة

لدينا $a = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $b = z_B - a z_B$

$= z_B(1-a)$

$= (-\sqrt{3}i)\left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= (-\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}$

العبارة المركبة للدوران r هي

$$z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ج) نعين (Γ) حيث $|\bar{z} + 3 + 2i\sqrt{3}| = |z_B|$

نعين طبيعة (Γ).

$|\overline{z + 3 - 2i\sqrt{3}}| = |z_B|$ معناه $|\bar{z} + 3 + 2i\sqrt{3}| = |z_B|$

أي $|z + 3 - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$|z - (-3 + 2i\sqrt{3})| = \sqrt{3}$

$|z - z_E| = \sqrt{3}$

$$EM = \sqrt{3}$$

ومنه (Γ) هي دائرة مركزها E ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

طبيعة (Γ'): (Γ') هي صورة (Γ) بواسطة الدوران r

ومنه (Γ') هي دائرة مركزها C لأن $r(E) = C$ ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$.

3as.ency-education.com

التمرين الرابع :

$g(x) = x + 1 - 2\ln x$

حساب نهايات g :

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 - 2\ln x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- دراسة إشارة وتغيرات الدالة g .

g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا :

$g'(x) = 1 - \frac{2}{x}$

$= \frac{x-2}{x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-2)$

جدول تغيرات g :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$3-2\ln 2$	↗	$+\infty$

استنتاج إشارة $g(x)$:

بما أن $g(2) = 3 - 2\ln 2 > 0$ قيمة حدية صغرى

فإن $g(x) > 0$ على $]0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	

II) $f(x) = x + \ln x - (\ln x)^2$

حساب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x + \ln x - (\ln x)^2$

$= \lim\limits_{x \to 0} x + \ln x(1 - \ln x) = -\infty$

التفسير الهندسي :

بما أن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ فإن (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ كمستقيم مقارب موازٍ لحور التراتيب .

تبين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \ln x - (\ln x)^2$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{\ln x}{x} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

$= +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

2) تبين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

f دالة قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا :

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{x + 1 - 2\ln x}{x}$

ومنه $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

3- دراسة إشارة وتغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ومنه $f'(x) > 0$ إذن f دالة متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

4- جدول تغيرات الدالة f .

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3as.ency-education.com

4 - دراسة إشارة العبارة $\ln x - (\ln x)^2$

$\ln x - (\ln x)^2 = 0$ معناه $\ln x (1 - \ln x) = 0$

إما $(\ln x = 0)$ أو $(1 - \ln x = 0)$

أي $x = 1$ و $x = e$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x - (\ln x)^2$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

إستنتاج الوضع النسبي بين $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ)

المعرف بـ: $y = x$

$f(x) - x = \ln x - (\ln x)^2$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x - (\ln x)^2$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	$(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت (Δ)		$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت (Δ)	

$(\mathcal{C}_f) \cap (\Delta) = \{A(1,1), B(e,e)\}$.

تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,6 < \alpha < 0,7$.

f دالة مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$

وبالخصوص على $]0,6;0,7[$ و

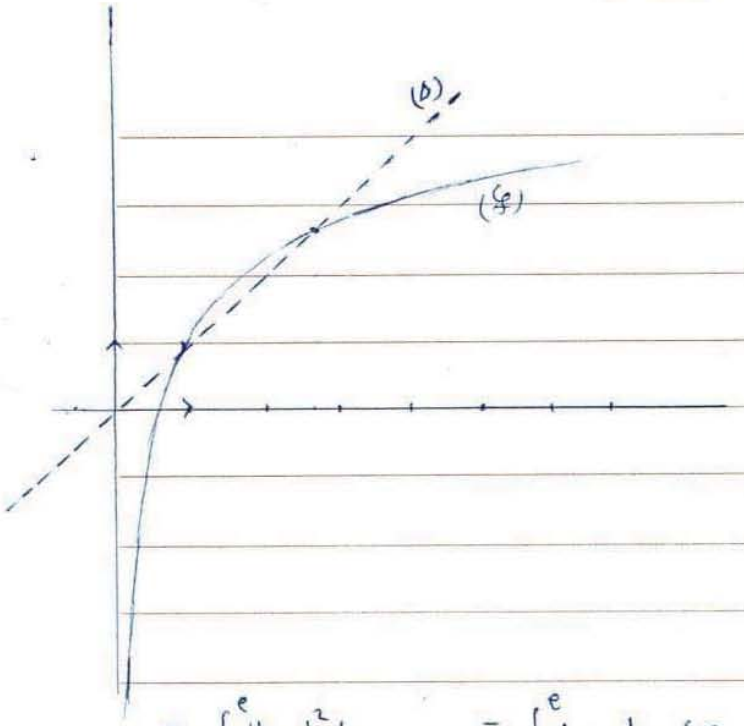
$f(0,7) \cdot f(0,6) < 0$ لأن: $\begin{cases} f(0,7) \approx \\ f(0,6) \approx \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

يوجد α وحيد في المجال $]0,6;0,7[$

بحيث $f(\alpha) = 0$

الإنشاء:



$J = \int_1^e (\ln x)^2 dx$ ، $I = \int_1^e \ln x \, dx$ (III

تبين أن $J = e - 2I$

بوضع $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(x) = \frac{2\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$J = \int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\left(\frac{2\ln x}{x}\right) dx$

$= \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2\ln x \, dx$

$= e(\ln e)^2 - 1(\ln 1)^2 - 2\int_1^e \ln x \, dx$

$\boxed{J = e - 2I}$

تحقق أن $x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية لـ $x \mapsto \ln x$

بوضع $h(x) = x\ln x - x$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا

$h'(x) = 1\ln x + \frac{1}{x}x - 1 = \ln x$

ومنه $x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية لـ $x \mapsto \ln x$

بـ حساب مساحة الحيز

$A = \int_1^e f(x) - x \, dx = \int_1^e \ln x - (\ln x)^2 dx$

$= \int_1^e \ln x - \int_1^e (\ln x)^2 dx$

$= \left[x\ln x - x\right]_1^e - (e - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e)$

$= e - e + 1 - e + 2(e - e) - 2(-1)$

$A = 3 - e$ ua

3as.ency-education.com