

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:  
الموضوع الأول

التمرين الأول :

- (1) نعرف في  $\mathbb{C}$  كثير الحدود  $P$  كثير حدود للمتغير المركب  $z$  بـ :  $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$   
(1) تحقق انه من اجل كل  $z$  من  $\mathbb{C}$  لدينا :  $P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 4)$   
(2) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(z) = 0$ .

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ذات اللواحق  $z_A = 2$  ،  $z_B = 1 + i\sqrt{3}$  و  $z_C = \overline{z_B}$  على الترتيب .

(1) اكتب على الشكل الاسي العدد المركب  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

(2) عين طبيعة التحويل النقطي  $f$  الذي يحول النقطة  $C$  الى النقطة  $B$  مع ذكر عناصره المميزة

(3) استنتج نوع المثلث  $ABC$

(4)  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي المركب ذات اللاحقة  $z$  التي تحقق :  $|z^2| - (z + \bar{z}) - 2 = 0$

(أ) تحقق ان النقطة  $B$  من المجموعة  $(E)$

(ب) عين ثم انشئ المجموعة  $(E)$  في المعلم  $(O, \vec{u}; \vec{v})$

التمرين الثاني :

$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول  $u_0 = -1$  ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $0 < u_n < 2$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$

(3) بين مع التبرير أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

(4) من اجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  نضع :  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

(أ) أكتب  $5v_{n+1}$  بدلالة  $v_n$  ثم استنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

(ب) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$

(ج) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### التمرين الثالث :

- يحتوي وعاء على ثلاث قريصات بيضاء مرقمة بالشكل 1، 5، 5 واربعة قريصات حمراء مرقمة بالشكل 1، 3، 3 .  
 القريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس،  
 نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد .  
 (1) أحسب احتمال الحدثين التاليين:  
 $A$  : " الحصول على قريصتين من نفس اللون"  
 $B$  : " الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 6"  
 (2) احسب  $P(A \cap B)$  ، هل الحدثين  $A$  ،  $B$  مستقلين ؟  
 (3) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لقريصتين مجموع الرقميين المسجلين عليهما.  
 أ) ما هي قيم المتغير العشوائي  $X$  ؟  
 ب) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$   
 ج) احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري.

### التمرين الرابع:

- (I) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $[-4; +\infty[$  بـ:  $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$   
 و  $(C_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j})$  (الوحدة 2cm)  
 (1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 (2) أ) اثبت أن المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = x - 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$   
 ب) ادرس الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(D)$ .  
 (3) أ) بين انه من اجل كل  $x$  من  $[-4; +\infty[$  لدينا :  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right)^2$   
 ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $[-4; +\infty[$  ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$   
 ج) استنتج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديد احداثيها.  
 د) بين أن المنحني  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث:  $-1.7 < \alpha < -1.6$   
 (4) أنشئ  $(C_f)$  و  $(D)$  في المعلم  $(O, \vec{i}; \vec{j})$  .  
 (II) (1) اوجد مجموعة الدوال الاصلية للدالة  $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$  على  $[-4; +\infty[$ .  
 (2)  $\lambda$  عدد حقيقي حيث  $\lambda > 0$   
 احسب بـ  $cm^2$  المساحة  $A(\lambda)$  للسطح المستوي المحدد بـ  $(C_f)$  و  $(D)$   
 و المستقيمين الذين معادلتيهما  $x = \lambda$  و  $x = 0$   
 (3) احسب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$  .

التمرين الأول :

- (I) حل في مجموعة الاعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 = 3z - 9$   
 (II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقطتين  $A, B$  ذات اللاحقتين  $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$  ،  $z_B = \overline{z_A}$  على الترتيب .

(1) احسب  $|z_A|$  ،  $|z_B|$  ثم استنتج ان النقطتين  $A, B$  تنتميان الى دائرة  $(C)$  يطلب تحديد عناصرها المميزة.

(2)  $T$  التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث :  $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$   
 (أ) حدد طبيعة التحويل النقطي  $T$  ، مع ذكر عناصره المميزة  
 (ب) عين  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالتحويل النقطي  $T$ .

(3) (أ) اكتب العدد المركب  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$  على الشكل الأسّي.

(ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي  $S$  الذي يحول النقطة  $C$  الى النقطة  $B$  ، مع ذكر عناصره المميزة.

التمرين الثاني :

المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بحدها الأول  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$$

(1) أحسب  $u_1, u_2$

(2) بين أن المتتالية العددية  $(u_n)$  ليست حسابية و ليست هندسية

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $v_n = u_n^2 + 3$

(أ) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية اساسها 2 ، ثم احسب حدها الاول  $v_0$

(ب) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

(ج) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) أكتب بدلالة  $n$  المجموعين  $S, S'$  ، حيث :

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S' = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

### التمرين الثالث :

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  .  
 نعتبر النقط  $A(0;4;1)$  ،  $B(1;3;0)$  ،  $C(2;-1;-2)$  ،  $E(7;-1;4)$   
 (1) بين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تشكل مستو.  
 (2) ليكن  $(D)$  المستقيم المار من النقطة  $E$  و  $\vec{u}(2;-1;3)$  شعاع توجيه له.  
 أ) بين أن المستقيم  $(D)$  عمودي على المستوي  $(ABC)$  .  
 ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  .  
 (3) ليكن  $(P)$  و  $(P')$  مستويين معرفين بمعادلتيهما كما يلي :

$$(P) : x + y + z = 0$$

$$(P') : x + 4y + 2 = 0$$

أ) بين أن  $(P)$  و  $(P')$  متقاطعين وفق مستقيم  $(D')$  المعروف بتمثيله الوسيط :

$$(D') : \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

ب) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم  $(D')$  و المستوي  $(ABC)$  .

### التمرين الرابع :

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j})$  ،  $\|\vec{i}\| = 1cm$  ،

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  :  $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$

(2) استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $[0; +\infty[$

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1)$

$(C_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في المعلم  $(O, \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ، ثم فسر النتيجة ببيان.

(2) أ) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :  $f'(x) = e^{-x} g(e^x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكل جدول تغيراتها

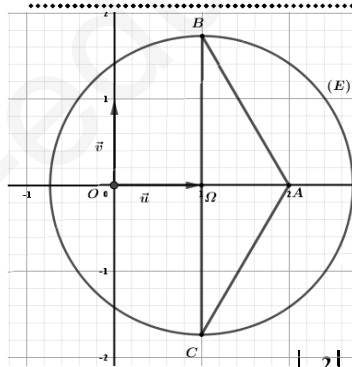
(3) أنشئ  $(C_f)$  في المعلم  $(O, \vec{i}; \vec{j})$

(4) أ) بين أن الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  :  $F(x) = x - (e^{-x} + 1) \ln(e^x + 1)$  هي دالة أصلية لدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

ب)  $A$  مساحة الحيز المحدد بـ  $(C_f)$  و المستقيمات  $y = 0$  ،  $x = 0$  ،  $x = \ln 2$  ، احسب بـ  $cm^2$  المساحة  $A$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

| العلامة | محاور الموضوع   | عناصر الإجابة<br>الموضوع الاول                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|         |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 05      | الأعداد المركبة | <p><b>التمرين الاول:</b></p> <p>(I)</p> <p>أ) التحقق انه من اجل كل <math>z</math> من <math>\mathbb{C}</math> فان <math>P(z) = (z-2)(z^2-2z+4)</math> :<br/> <math>(z-2)(z^2-2z+4) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = P(z)</math><br/>         ب) الحل في <math>\mathbb{C}</math> ، للمعادلة <math>P(z) = 0</math> :<br/> <math>P(z) = 0</math> معناه: <math>(z-2)(z^2-2z+4) = 0</math> ومنه <math>z = 2</math> أو <math>z = 1 - i\sqrt{3}</math> أو <math>z = 1 + i\sqrt{3}</math><br/> <math>S = \{z = 2 ; z = 1 - i\sqrt{3} ; z = 1 + i\sqrt{3}\}</math> أي <math>z = 1 + i\sqrt{3}</math></p> <p>(II)</p> <p>(1) كتابة الشكل الاسي للعدد المركب <math>\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{-1 - i\sqrt{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}</math> :<br/>         (2) تعيين طبيعة التحويل النقطي <math>f</math> :<br/>         لدينا : <math>\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}</math> أي : <math>z_B - z_A = e^{-i\frac{2\pi}{3}} (z_C - z_A)</math><br/>         ومنه : التحويل النقطي <math>f</math> هو دوران مركزه النقطة <math>A</math> وزاويته <math>\theta = -\frac{2\pi}{3}</math><br/>         (3) استنتاج نوع المثلث <math>ABC</math> :<br/>         لدينا <math>AB = AC</math> ومنه <math> z_B - z_A  =  e^{-i\frac{2\pi}{3}} (z_C - z_A)  =  e^{-i\frac{2\pi}{3}}   z_C - z_A  =  z_C - z_A </math><br/>         إذن: المثلث <math>ABC</math> متساوي الساقين .</p> <p>(4)</p> <p>أ) التحقق من ان النقطة <math>B</math> من المجموعة <math>(E)</math> :<br/> <math> z_B ^2 - (z_B + \bar{z}_B) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0</math><br/>         إذن: النقطة <math>B</math> من المجموعة <math>(E)</math> .<br/>         ب) تعيين و انشاء المجموعة <math>(E)</math> في المعلم <math>(O, \vec{u}; \vec{v})</math> :<br/>         لتكن النقطة <math>M</math> من المستوي المركب لاحقتها <math>z = x + iy</math><br/>         لدينا <math>M</math> من المجموعة <math>(E)</math> معناه ان : <math> z ^2 - (z + \bar{z}) - 2 = 0</math><br/>         ومنه <math>x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0</math> أي <math>(x-1)^2 + y^2 = 3</math> وبالتالي مجموعة النقط <math>(E)</math><br/>         هي عبارة عن الدائرة التي مركزها النقطة <math>\Omega(1;0)</math> ونصف قطرها <math>R = \sqrt{3} u.m</math></p> |



**التمرين الثاني:**

(1) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n : 0 < u_n < 2$  :

- من اجل  $n = 1$  لدينا  $u_1 = \frac{1}{2}$  ومنه  $0 < u_1 < 2$  وبالتالي الخاصية محققة من اجل  $n = 1$
- نفرض ان  $0 < u_n < 2$  محققة من اجل العدد الطبيعي  $n$  ونبرهن ان  $0 < u_{n+1} < 2$  محققة كذلك  
لنا  $0 < u_n < 2$  ومنه  $3 < u_n + 3 < 5$  ومنه  $\frac{1}{5} < \frac{1}{u_n + 3} < \frac{1}{3}$  ومنه  $-\frac{5}{3} < -\frac{5}{u_n + 3} < -1$   
ومنه  $3 - 1 < 3 - \frac{5}{u_n + 3} < 3 - \frac{5}{3}$  ومنه  $\frac{4}{3} < \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} < 2$  أي  $0 < \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} < 2$   
أي  $0 < u_{n+1} < 2$  ومنه الخاصية  $0 < u_{n+1} < 2$  محققة من اجل العدد الطبيعي  $n$ .
- نستنتج مما سبق ان الخاصية  $0 < u_n < 2$  محققة اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ .

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 3} > 0$$

(3) تبرير ان المتتالية  $(u_n)$  متقاربة:

بما ان  $(u_n)$  متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي اذن متقاربة

(4) ا) كتابة  $5v_{n+1}$  بدلالة  $v_n$  ثم استنتاج طبيعة المتتالية  $(v_n)$  :

$$5v_{n+1} = \frac{15u_{n+1} + 20}{u_{n+1} + 3} = \frac{5u_n - 10}{5u_n + 10} = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} = v_n : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ كل اجل}$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية اساسها  $q = \frac{1}{5}$  وحدها الاول

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \frac{-1 - 2}{-1 + 2} = -3$$

ب) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$  :  $n \in \mathbb{N}$  ،  $v_n = -3 \left( \frac{1}{5} \right)^n$  بالتعويض نجد

$$u_n = \frac{-2v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{2(5^n) - 6}{5^n + 3}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ج) استنتاج } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(5^n) - 6}{5^n + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(5^n)}{5^n + 3} = 2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

(1) حساب احتمال الحدثين  $A$  ،  $B$  :

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(A) = \frac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2} = \frac{3}{7}$$

(2) حساب احتمال  $P(A \cap B)$  ، و هل الحدثين  $A$  ،  $B$  مستقلين :

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 \times C_1^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \quad \text{لدينا:}$$

اذن :  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  أي الحدثين  $A$  ،  $B$  مستقلين(3) أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي  $X$  :

$$X \in \{ 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 \}$$

ب) اعطاء قانون احتمال للمتغير العشوائي  $X$  :

$$P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \frac{6}{21}$$

$$P(X=6) = \frac{7}{21}$$

$$P(X=8) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \frac{4}{21}$$

$$P(X=10) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$$

| $x_i$      | 2              | 4              | 6              | 8              | 10             |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{6}{21}$ | $\frac{7}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{1}{21}$ |

ب) حساب  $E(X)$  ،  $\sigma(X)$  للمتغير العشوائي  $X$  :

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P(X=x_i) = (2)\left(\frac{3}{21}\right) + (4)\left(\frac{6}{21}\right) + (6)\left(\frac{7}{21}\right) + (8)\left(\frac{4}{21}\right) + (10)\left(\frac{1}{21}\right) = \frac{38}{7}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 P(X=x_i) - (E(X))^2 \\ &= (2)^2 \left(\frac{3}{21}\right) + (4)^2 \left(\frac{6}{21}\right) + (6)^2 \left(\frac{7}{21}\right) + (8)^2 \left(\frac{4}{21}\right) + (10)^2 \left(\frac{1}{21}\right) - \left(\frac{38}{7}\right)^2 \\ &= \frac{680}{147} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{680}{147}} \approx 2.15$$

(1) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  : نجد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) أ) إثبات أن المستقيم  $(D)$  ذي المعادلة  $y = x - 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$  :

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$

إذن المستقيم  $(D)$  ذي المعادلة  $y = x - 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(D)$  : لدينا :  $d(x) = f(x) - (x - 2) = \frac{8}{e^x + 2}$

بما أنه من أجل كل  $x$  من  $[-4; +\infty[$  :  $0 < \frac{8}{e^x + 2}$  أي :  $0 < d(x)$

أي أن  $(C_f)$  يقع فوق المستقيم  $(D)$ .

(3) أ) حساب  $f'(x)$  :  $f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2} = \left( \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right)^2$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $[-4; +\infty[$  وتشكيل جدول تغيراتها :

دراسة إشارة  $f'(x)$  :

لدينا من أجل كل  $x$  من  $[-4; +\infty[$  :  $(e^x + 2)^2 > 0$  و  $(e^x - 2)^2 \geq 0$  ومنه  $f'(x) \geq 0$

و لدينا  $f'(x) = 0$  يكافئ أن  $(e^x - 2)^2 = 0$  يكافئ أن  $e^x - 2 = 0$  يكافئ أن  $x = \ln 2$ .

تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$  :

| $x$     | $-4$                      | $\ln 2$ | $+\infty$ |
|---------|---------------------------|---------|-----------|
| $f'(x)$ | +                         | 0       | +         |
| $f(x)$  | $-2 - \frac{4}{2e^4 + 1}$ |         | $+\infty$ |

(ج) استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف مع تحديد إحداثياتها:

بما أن  $f'(x)$  تنعدم من أجل القيمة  $\ln 2$  ولا تغير إشارتها عند القيمة  $\ln 2$  فإن النقطة

$\Omega(\ln 2; \ln 2)$  نقطة انعطاف للمنحني  $(C_f)$

(د) تبين أن  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث:

$$-1.7 < \alpha < -1.6$$

لدينا دالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماماً على  $[-4; +\infty[$  و  $f(-1.7) \times f(-1.6) < 0$  إذن

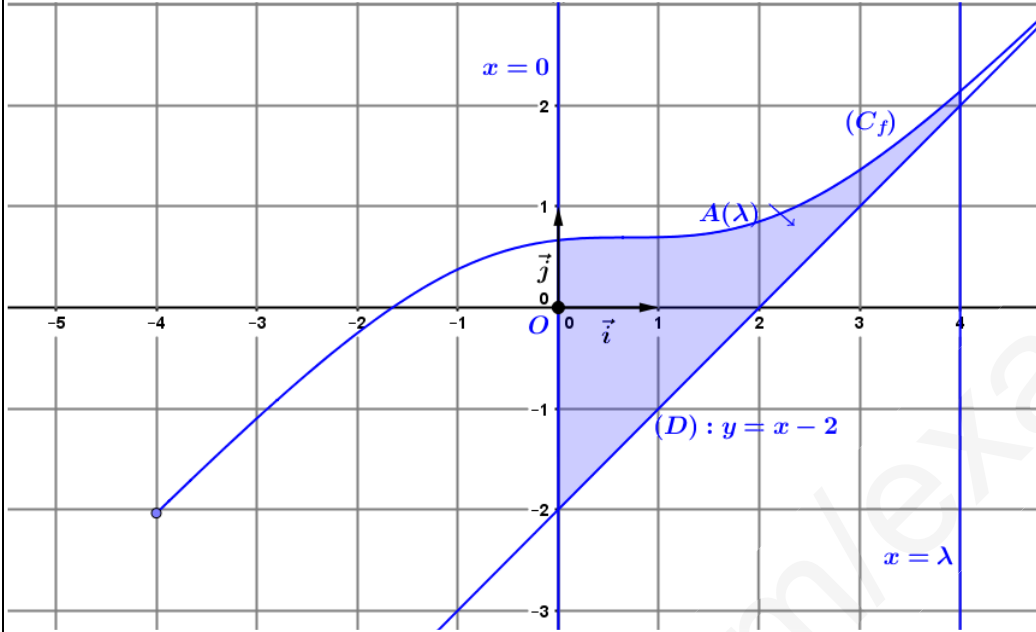
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حل وحيد  $\alpha$  حيث :

$$-1.7 < \alpha < -1.6$$

أي أن المنحني  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$ .



(4) إنشاء  $(C_f)$  و  $(D)$  في المعظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :



(II) 1) إيجاد الدوال الأصلية للدالة  $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$  على المجال  $[-4; +\infty[$  :

الدالة  $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$  معرفة ومستمرة على المجال  $[-4; +\infty[$  فهي تقبل دوال أصلية .

نضع  $u(x) = e^x + 2$  ومنه  $u'(x) = e^x$  ومنه نجد ان الدالة  $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$  مكتوبة على

الشكل  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  اي ان مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 2}$  على المجال

$[-4; +\infty[$  هي :  $x \mapsto \ln(e^x + 2) + k$  ;  $k \in \mathbb{R}$  .

(2) حساب المساحة  $A(\lambda)$  :

$$A(\lambda) = 2 \times 2 \left[ \int_0^\lambda \left( \left( x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} \right) - (x - 2) \right) dx \right] = 8 \left[ \int_0^\lambda \left( 4 - \frac{4e^x}{e^x + 2} \right) dx \right]$$

$$= 8 \left[ 4x - 4 \ln(e^x + 2) \right]_0^\lambda = 8 \left( 4\lambda - 4 \ln(e^\lambda + 2) + 4 \ln 3 \right) cm^2$$

(3) حساب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$  :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 8 \left( 4\lambda - 4 \ln(e^\lambda + 2) + 4 \ln 3 \right) = +\infty$$

الدوال  
العديدية  
و  
الحساب  
التكاملي

التمرين الأول:

(I) الحل في  $\mathbb{C}$  للمعادلة  $z^2 = 3z - 9$  :

المعادلة  $z^2 = 3z - 9$  تكافئ  $z^2 - 3z + 9 = 0$  ومنه  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (1)(9) = -27$

ومنه نجد  $S = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i ; \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}$

(II) حساب  $|z_A|, |z_B|$  :

$$|z_B| = |z_A| = 3, \quad |z_A| = \left| 3e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = 3$$

لدينا  $|z_A| = OA = 3$  وأيضا  $|z_B| = OB = 3$  إذن نستنتج أن النقطتين A و B تنتميان للدائرة ذات المركز O ونصف القطر R=3.

(2) أ) تحديد طبيعة التحويل T:

لنا العبارة المركبة لهذا الدوران هي  $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$  وهي من الشكل  $z' - z_0 = e^{i\frac{2\pi}{3}} (z - z_0)$  وحسب الدرس يتضح ان هذه العبارة هي لدوران مركزه النقطة O وزاويته  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

ب) تعيين  $z_C$  لاحقة النقطة C صورة A بالتحويل T:

$$z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \left( 3e^{i\frac{\pi}{6}} \right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

(3) أ) كتابة العدد المركب  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$  على الشكل الأسّي:

$$\text{لنا } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) - \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right)}{\left( \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right) - \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}i = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي S الذي يحول C الى B مع ذكر عناصره المميزة:

$$\text{لنا } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ ومنه } z_B - z_A = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A) \text{ وهو من الشكل}$$

$z' - z_0 = re^{i\theta}(z - z_0)$  أي ان النقطة B هي صورة C بتشابه مباشر وعليه نستنتج ان S هو

$$\text{التشابه المباشر الذي نسبته } r = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ومركزه النقطة A وزاويته } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

### التمرين الثاني:

(1) حساب الحدود  $u_1, u_2$ :

$$u_2 = \sqrt{u_1^2 + 2} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}, \quad u_1 = \sqrt{u_0^2 + 2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

(2) تبين ان المتتالية  $(u_n)$  ليست حسابية وليست هندسية:

$$\sqrt{5} \neq 3 \text{ أي } u_2 u_0 \neq u_1^2 \text{ اذن المتتالية } (u_n) \text{ ليست هندسية خاصة الوسط الهندسي غير محققة}$$

$$1 + \sqrt{5} \neq 2\sqrt{3} \text{ أي } u_0 + u_2 \neq 2u_1 \text{ اذن المتتالية } (u_n) \text{ ليست حسابية الوسط الحسابي غير محقق}$$

(3) أ) اثبات ان المتتالية  $(v_n)$  حسابية أساسها 2 و حساب حدها الاول  $v_0$ :

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 + 3 = (u_n^2 + 3) + 2 = v_n + 2 : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ كل}$$

$$\text{ومنه المتتالية } (v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } r = 2 \text{ وحدها الاول } v_0 = u_0^2 + 3 = 1 + 3 = 4$$

(ب) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$ :

$$\text{لنا } v_n = 2n + 4, n \in \mathbb{N} \text{ ومنه } u_n = \sqrt{v_n - 3} = \sqrt{2n + 1}, n \in \mathbb{N}$$

(ج) حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2n + 1} = +\infty$$

(4) كتابة بدلالة  $n$  المجموعين  $S, S'$ :

$$\text{نجد } S = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ ومنه } S = (n+1)(n+4)$$

$$\text{أيضا } S' = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 \text{ ومنه } S' = 3(n+1) \text{ و } S' = S - 3(n+1)$$

### التمرين الثالث:

(1) تبين أن النقط  $A, B, C$  تشكل مستو:

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AB} (1; -1; -1), \overrightarrow{AC} (2; -5; -3) \text{ و لنا : } \frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}$$

إذن فإن الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقاط  $A, B, C$  تشكل مستو

(2)

أ) تبين ان المستقيم  $(D)$  عمودي على المستوي  $(ABC)$ :

لدينا :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (1)(2) + (-1)(-1) + (-1)(3) = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = (2)(2) + (-5)(-1) + (-3)(3) = 0 \end{cases}$$

اذن المستقيم  $(D)$  عمودي على المستوي  $(ABC)$  لان شعاع توجيهه يعامد شعاعي توجيهه.

(ب) استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ :

بما أن المستقيم  $(D)$  عمودي على المستوي  $(ABC)$  فإن الشعاع  $\vec{u}(2; -1; 3)$  هو شعاع ناظمي

$$\text{للمستوي } (ABC) \text{ ومنه نجد : } 2x - y + 3z + d = 0$$

$$A \in (ABC) : -2(0) - 3(4) + 3(1) + d = 0 \text{ اذن : } d = 4$$

$$\text{و بالتالي : } (ABC) : 2x - y + 3z + 4 = 0$$

المتتاليات  
العددية

الهندسة  
الفضائية

(3)

(أ) تبين ان المستويين  $(P)$  و  $(P')$  متقاطعين وفق مستقيم  $(D')$  :

$$\begin{cases} x = -2 - 4t & \dots\dots(1) \\ y = t & \dots\dots(2) \\ z = 2 + 3t & \dots\dots(3) \end{cases} \quad \text{لدينا: المستقيم } (D') \text{ معرف بتمثيله الوسيطى : } t \in \mathbb{R} \dots\dots$$

و المستويين  $(P)$  و  $(P')$  معرفين بمعادلتهم :

$$(P) : x + y + z = 0 \dots\dots(4) \quad (P') : x + 4y + 2 = 0 \dots\dots(5)$$

بتعويض (1) و (2) و (3) في (4) و (5) على التوالي نجد :

$$(-2 - 4t) + (t) + (2 + 3t) = 0 \quad \text{و} \quad (-2 - 4t) + 4(t) + 2 = 0$$

اذن :  $(P) \cap (P') = (D')$  .(ب) دراسة الوضع النسبي بين المستوي  $(ABC)$  والمستقيم  $(D')$  :

$$\text{لدينا : } \vec{u}_{(D')} \cdot \vec{c} \vec{n}_{ABC} = (2)(-4) + (-1)(1) + (3)(3) = 0$$

اذن :  $B \notin (D')$  و  $A \notin (D')$  .**التمرين الرابع:**

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة  $g$  على  $[0; +\infty[$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{(أ) النهايات :}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $[0; +\infty[$  :

$$\text{حساب } g'(x) : g'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$$

دراسة إشارة  $g'(x)$  : لدينا من اجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة  $g'(x)$  تعتمد على إشارة البسط  $-x$  لدينا من اجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $-x \leq 0$ وبالتالي : من اجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $g'(x) \leq 0$ (ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$  :

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | 0 | —         |
| $g(x)$  | 0 | $-\infty$ |

(2) استنتاج إشارة  $g(x)$  على المجال  $[0; +\infty[$  :

|        |   |           |
|--------|---|-----------|
| $x$    | 0 | $+\infty$ |
| $g(x)$ | 0 | —         |

(II) (1) أ) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  :  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

(ب) التفسير الهندسي :

$(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين معدلتيهما  $y = 1$  و  $y = 0$

(2) أ) تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = e^{-x} g(e^x)$  :

$$f'(x) = (e^{-x} \ln(e^x + 1))' = e^{-x} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right) = e^{-x} g(e^x)$$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

دراسة إشارة  $f'(x)$  :

لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $e^{-x} > 0$

و لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $e^x > 0$

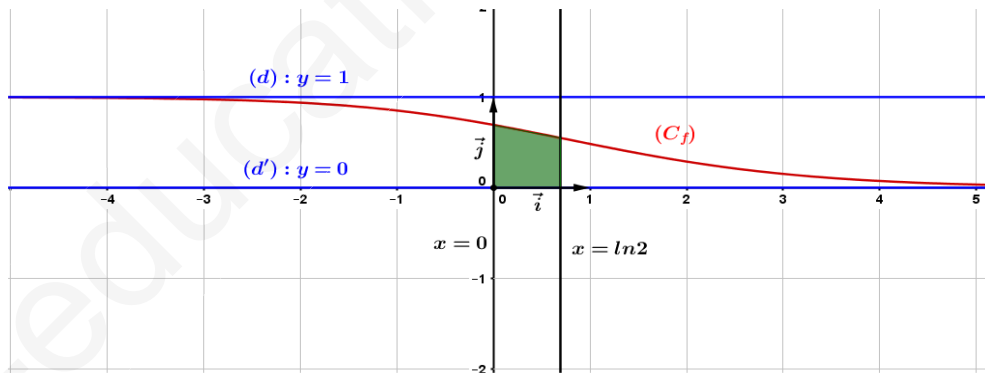
وبما أن  $g(x)$  سالبة على المجال  $[0; +\infty[$  فإن  $g(e^x) < 0$

وبالتالي : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) < 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  :

| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           | -         |
| $f(x)$  | 1         | 0         |

(3) إنشاء  $(C_f)$  في المعلم  $(O, \vec{i}; \vec{j})$  :



(4) أ) تبين أن الدالة  $F(x) = x - (e^{-x} + 1) \ln(e^x + 1)$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  :  
لدينا الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$F'(x) = (x - (e^{-x} + 1) \ln(e^x + 1))' = e^{-x} \ln(e^x + 1) = f(x)$$

ومنه الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  .

(ب) حساب بـ  $cm^2$  المساحة  $A$  :

$$A = 1 \times 1 \left[ \int_0^{\ln 2} (e^{-x} \ln(e^x + 1)) dx \right] = [x - (e^{-x} + 1) \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} \approx 0.43 cm^2$$

لوطاية في 2019/05/23

الدوال  
الأصلية  
وحساب  
المساحات