

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

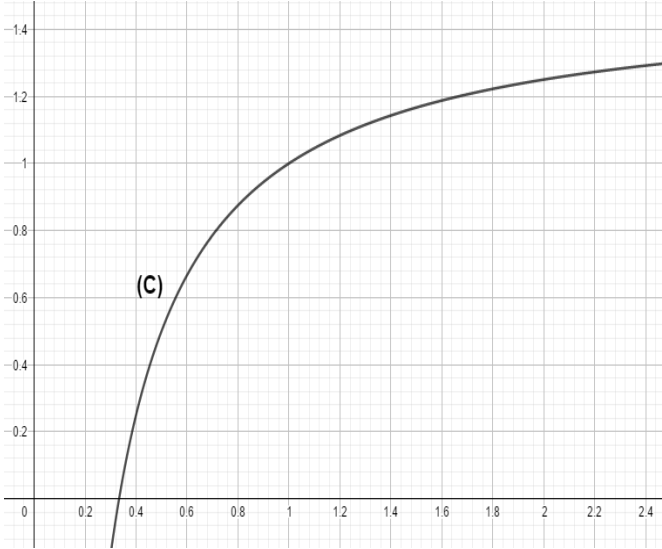
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في مستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس (في الوثيقة المرفقة) .

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$

(2) (U_n) متتالية عددية معرفة على N ب : $U_0 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$



ا- مثل الحدود U_0, U_1, U_2, U_3 على محور

الفواصل مبرزاً خطوط الانشاء.

ب- يرهّن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$U_n > 1$$

ج- بين ان المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

ماذا تستنتج ؟

(3) ا- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$0 < U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$$

ب- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ثم عيّّن نهاية المتتالية (U_n)

(4) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي $v_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$

ا- بين ان (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول ; ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

ج- احسب المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{v_0 - 1}{U_0} + \frac{v_1 - 1}{U_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{U_n}$

التمرين الثاني (04.5 نقاط) :

1 الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لتكن (p_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق

$$(m+2)^2 = m^2x + (m+1)y + (m^2 + m + 1)z \text{ حيث } m \text{ وسيط حقيقي}$$

1. أ بّر ان (p_m) مستوئيهما كان الوسيط الحقيقي m .

ب) بين ان كل المستويات تشمل مستقيما ثابتا (D) يطلب إعطاء تمثيل وسيطي له .

2. نعتبر النقطة $A(0; 1; -1)$ والمستقيم (Δ) الذي $(t \in \mathcal{R})$ تمثيل وسيطي له.

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = -t \end{cases}$$

اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (p) الذي يحوي (Δ) ويمر بالنقطة A .

3. ليكن (Q) و (R) المستويين المعرفين بالمعادلتين الدكارتيتين $x - y + 2z + 3 = 0$ و $2x - y + z + 2 = 0$ على الترتيب

اثبت ان (Q) و (R) متقاطعان وعين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما.

4. لتكن النقطة $I(1; 0; 0)$

أ) أثبت أنه يوجد سطح كرة وحيد (S) ذي المركز I يمر كلا من (Q) و (R)

ب) اوجد معادلة ديكارتية ل (S)

5. لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء والتي تحقق

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 6 = 0 \quad \text{حيث } m \in \mathcal{R}$$

أ) اثبت أن (S_m) سطح كرة ، يطلب تعيين مركزه I_m ونصف قطره R .

ب) عين مجموعة النقط I_m لما m يمسح $\mathcal{R}$

ج) ناقش حسب قيم m تقاطع (S_m) و (Q) .

التمرين الثالث (04.5 نقاط) :

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث: $p(z) = 8z^3 + (12i - 16)z^2 + 50z - 100 + 75i$

1. أ) عين العددين المركبين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = (z^2 + \frac{25}{4})(\alpha z + \beta)$

ب) استنتج حلول المعادلة $p(z) = 0$

2. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $Z_A = 2 - \frac{3}{2}i$ و $Z_B = \frac{5}{2}i$

أ) عين Z_C لاحقة النقطة C حيث : $\begin{cases} 2|Z_C - Z_A| = |Z_B - Z_A| \\ \arg(Z_C - Z_A) = \frac{\pi}{2} + \arg(Z_B - Z_A) \end{cases}$

ب) استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته وزاوية له

ج) حدد طبيعة المثلث ABC ، ثم احسب مساحته.

د) لتكن النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S . بين ان مساحة المثلث ACD تساوي $\frac{5}{4} ua$

3. أ) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S .

ب) من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، نعتبر التحويل النقطي T_n المعروف ب : $T_n = \underbrace{SoSo \dots So}_n$ مرة

برهن بالتراجع أن العبارة المركبة للتحويل T_n هي : $Z' = \frac{1}{2^n} e^{in\frac{\pi}{2}}(Z - Z_A) + Z_A$

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها التحويل T_n تحاكيا مركزه النقطة A يطلب تعيين نسبته.

4. نعتبر النقطتين M و N صورتا النقطة B بالتحويلين T_{4k} و T_{4k-2} على الترتيب حيث $k \in \mathbb{N}^*$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم ، النقطة A تنتمي إلى $[MN]$

ب) أحسب بدلالة العدد الطبيعي k ، الطول MN

ج) أحسب $\lim_{K \rightarrow +\infty} MN$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$

(1) (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ / تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$

ب / احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج / أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أ / بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاريين (D) و (D') معادلتهما:

$y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب.

ب / ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاريين (D) و (D') .

ج / بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

(3) أرسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

(4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته: $y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ / بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$.

ب / ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f)

(5) نضع: $I = \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} [f(x) - (x - e)] dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln(1 + X^n) dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ / فسر هندسيا العدد I و احسب العدد I_1 .

ب / بين أن: $0 \leq I_n \leq \ln 2$

ج / عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(6) باستعمال: $\ln(1 + X) \leq X$ ، من أجل كل $X \in]0; +\infty[$

أ* / استنتج أن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2}+e}^{\ln \sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

ب / اعط حصرا للعدد $I + I_1$.

اتمى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04.5 نقاط) :

- I. (1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي بواقي قسمة 3^n على 10
 (2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي فان العدد $7^{4n+1} + 2021^n + 2019^{2n} + 1$ يقبل القسمة على 10
- (3) A عدد طبيعي يكتب $\overline{xx0xx02}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $\overline{y612}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7. أوجد x و y ثم أكتب A في النظام العشري.
- II. (1) حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 3)y$
 (2) نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق : $f(0) = 1$, بين ان $f(x) = 3^x$
 (3) ما هو رقم احاد العدد $f(1440) + f(2019)$
 (4) نعتبر المجموع $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ حيث S_n احسب بدلالة n المجموع S_n ثم اوجد الاعداد الطبيعية n التي يكون من اجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10.
- III. يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10 نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.
 أ- أحسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما يساوي مجموع أرقام العدد 2019.
 ب- X متغير عشوائي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المتحصل عليهما.
 ج - عرف قانون احتمال X ثم احسب أمله الرياضي

التمرين الثاني (04 نقاط) :

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب: $u_1 = \frac{1}{2}$ و بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$

أ) ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل $n \geq 1$ بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{5}$

بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

ب) استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .

2. نعتبر نردين A و B غير مزيفين بحيث : النرد A به ثلاث اوجه حمراء و ثلاث اوجه بيضاء ، اما النرد B به اربع اوجه حمراء و وجهين بيضاوين.

نختار عشوائيا نردا ونرميه : إذا ظهر اللون الأحمر نحتفظ بهذا النرد ، اما اذا ظهر اللون الأبيض نغير النرد. ثم نرمي هذا النرد وهكذا دواليك.

نرمز ب A_n : الى الحادثة : " رمي النرد A مرة n " و بـ : $\overline{A_n}$ الحادثة العكسية للحادثة A_n .

R_n الى الحادثة : " ظهور اللون الأحمر في الرمية n " و بـ : $\overline{R_n}$ الحادثة العكسية للحادثة R_n .

ونرمز بـ : a_n الى احتمال الحادثة A_n و r_n الى احتمال الحادثة R_n .

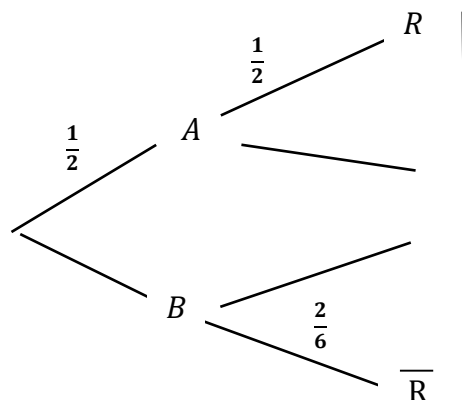
أ) عين a_1

ب) اكمل الشجرة ثم عين r_1

ج) بملاحظة أنه من اجل كل $n \geq 1$

$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$$

$$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3} \quad \text{بين أن :}$$



- (د) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$: $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$
- (هـ) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ ثم عيّن عبارة a_n بدلالة n
- (و) استنتج عبارة r_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$

التمرين الثالث (04 نقاط) :

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2 - 8z + 17 = 0$
- (2) في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و D

التي لواحقها على الترتيب : $a = 4 - i$ ، $b = 4 + i$ و $d = -i$

وليكن R الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $w = 2$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ / بين أن العبارة المركبة للدوران من الشكل : $z' = iz + 2 - 2i$

ب / عيّن لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R

ج / بين أن : $\frac{c-d}{c-b} = -i$ ثم استنتج طبيعة المثلث BCD

د / بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

هـ / عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون $|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$

التمرين الرابع (06.5 نقاط):

الدالتان العدديتان f و g معرفتان على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x \quad \text{و} \quad f(x) = 2x + 1 + \frac{1 - \ln x}{x}$$

$(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1.

أ / أثبت أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$

ب / أحسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

2.

أ / أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب / أثبت أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x + 1$ هو مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$

ج / أدرس وضعية المنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ)

3. أثبت أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4. أنشئ كلا من (Δ) و (C_f)

5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x + 1))dx$

أ/ أحسب U_n بدلالة n ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n)

ب/ لتكن A مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) وبالمستقيمين

الذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e^2$

** تحقق من أن : $A = (U_0 - U_1) ua$

6. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالعلاقة : $h(x) = x^2(1 + \ln x) - 3x + 2$

أ) أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ فإن $\frac{h(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) - 4$

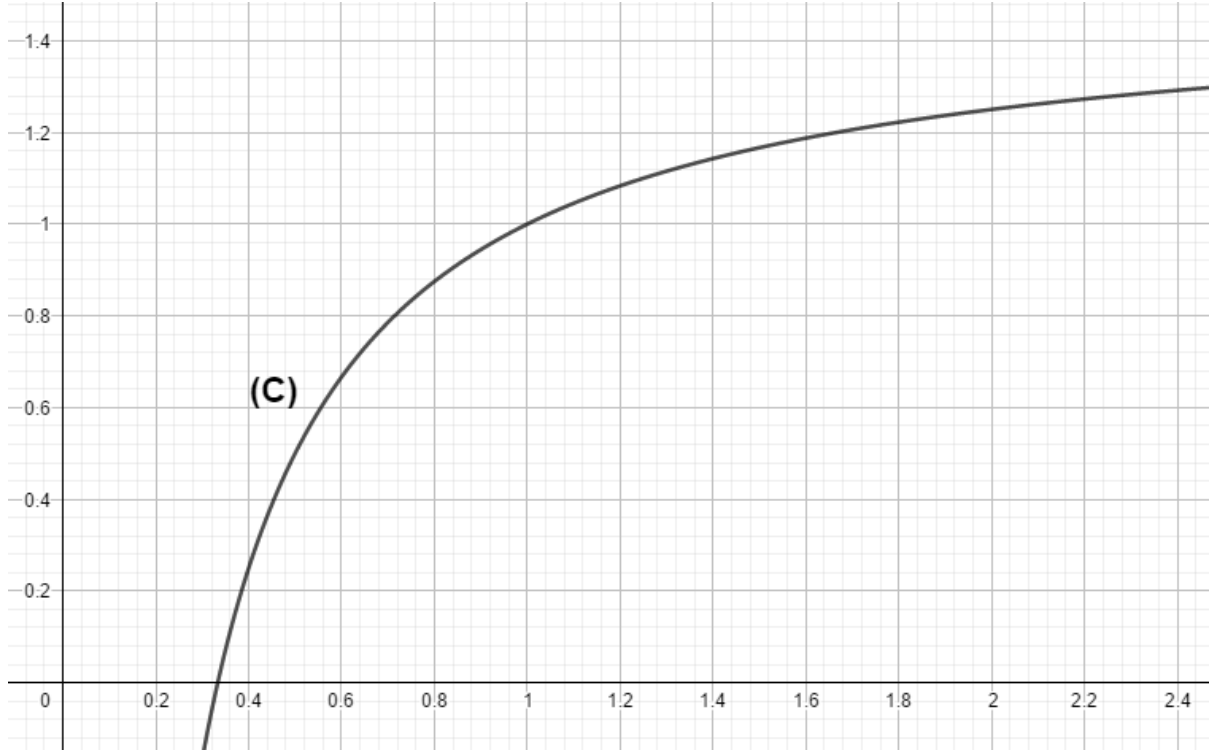
ثم استنتج أن $h(x) \geq 0$

ب) عين x بحيث يكون $h(x) = 0$

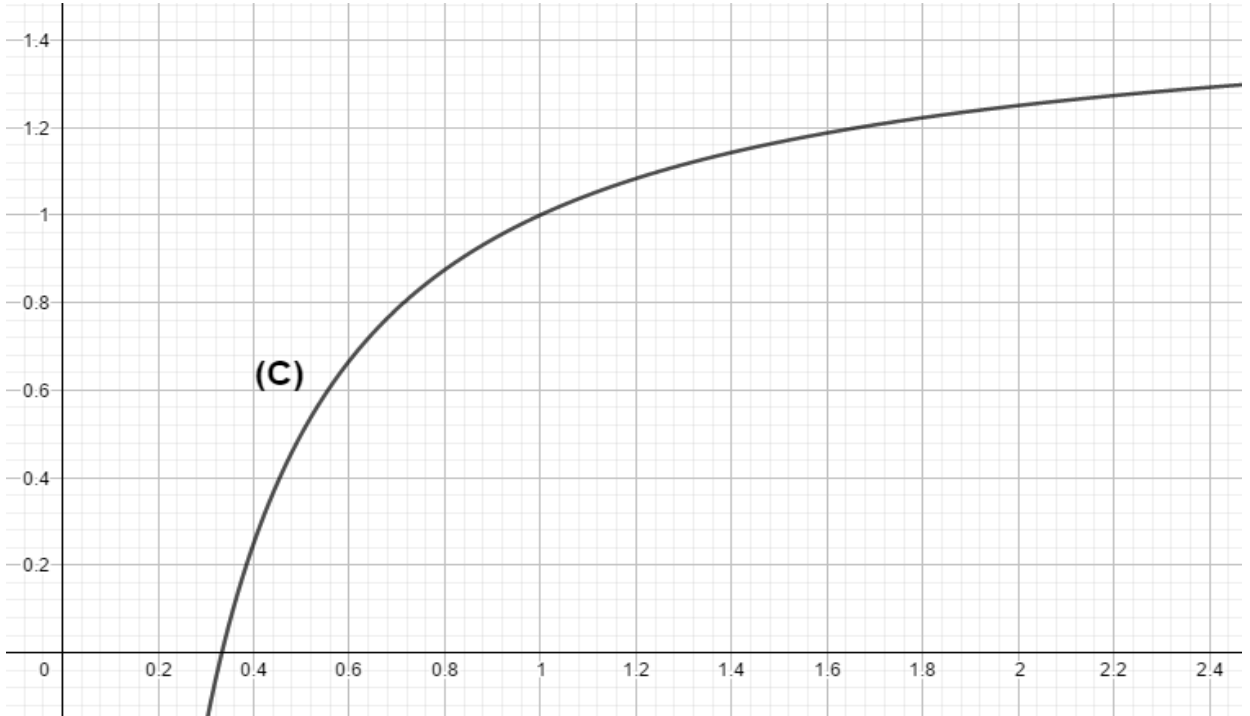
اتهى الموضوع الثاني

ملاحظة : تعاد الوثيقة مع ورقة الإجابة ولو كانت فارغة
الإسم واللقب :

القسم : 3 رياضيات



ملاحظة : تعاد الوثيقة مع ورقة الإجابة ولو كانت فارغة
الإسم واللقب :



..... الأستاذ: تونسي ن يتمنى لكم التوفيق والنجاح tounsi_nawri@yahoo.com