



ثانوية الدكتور بو عمران الشيخ بالبيض
دورة : ماي 2019



مديرية التربية لولاية البيض
امتحان تجريبي بكالوريا التعليم الثانوي

المدة: ثلاث ساعات و 30 دقيقة .

اختبار مادة: الرياضيات

على المترشح التطرق الى أحد الموضوعين على الخيار.

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (4 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$.

(1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي l يطلب تعيينه جبريا .

(4) برهن من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$.

(5) استنتج أن : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (4 نقط)

يحتوي كيس U على خمس كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء و كرتين خضراوين ، لا نفرق بينها باللمس .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرات في آن واحد .

(1) احسب احتمال كل من الحادثتين :

A : " الكرات المسحوبة من نفس اللون " ؛ C : " من بين الكرات الثلاث توجد كرة واحدة فقط خضراء " .

(2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المسحوبة الظاهرة "

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم أكتب قانون احتماله .

(ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و التباين $V(X)$.

(3) في تجربة عشوائية ثانية نعتبر الكيس U وكيس آخر V يحوي كرتين بيضاوين و كرتين حمراوين و كرة خضراء .

لإختيار كيس للسحب نرم حجر نرد غير مزيفة فإذا ظهر الرقم 5 نسحب كرة واحدة من الكيس U وفي الحالات الأخرى نسحب كرة واحدة من الكيس V .

(أ) مثل هذه التجربة بشجرة الإمكانات

(ب) لتكن الحادثة B : "الحادثة سحب كرة بيضاء " . بين أن احتمال سحب كرة بيضاء هو : $P(B) = \frac{5}{12}$.

(ج) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ، فما هو احتمال أن تكون من الكيس V .

التمرين الثالث: (5 نقط)

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z + \sqrt{3} - 3i)(z^2 - 6z + 12) = 0$.
- (II) في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقتها :
- $z_C = -\sqrt{3} + 3i$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ ، $z_A = 3 + i\sqrt{3}$
- (1) أ) أكتب z_A على الشكل الأسّي ثم استنتج z_B على الشكل الأسّي .
 ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$.
 أكتب L_n على الشكل الجبري ثم أحسب العدد $L_{2019} + L_{1440}$.
- (2) تحقق أن : $z_C = iz_A$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAC .
- (3) لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 3 - \sqrt{3}$ والتشابه S الذي مركزه E ويحول A الى C .
 أ) عين نسبة وزاوية التشابه S .
 ب) بين أن النقط : O ، A ، E و C تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها .
- (4) عين ثم أرسم (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي من أجلها يكون العدد : $\frac{z_C - z}{z_A - z}$ تخيليا بحتا .

التمرين الرابع: (7 نقط)

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x$.
- (1) (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.
 أ) أحسب نهايتي الدالة f عند طرفي مجال تعريفها .
 ب) برهن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x + 1$ مقارب للمنحني (C_f) في جوار $-\infty$.
 ج) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمقارب (Δ) .
- (2) أ) أحسب $f'(x)$ ثم بين من أجل كل عدد حقيقي x أن : $f'(x) = (2e^x + 1)(e^x - 1)$.
 ب) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
 ج) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلته .
 د) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها
 هـ) أرسم في نفس المعلم كلا من : (Δ) ، (T) ، (C_f) .
- (3) أحسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمت :
 $y = 0$ ، $x = -2$ ، $x = 0$.
- (4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة : $m = 1 + e^{2x} - e^x$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (4نقط)

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط :

$$A(-1; -1; 0) , B(6; -5; 1) , C(1; 2; -2) , S(13; 37; 57)$$

(1) علم النقطتين : A و C .

(2) أ) بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا .

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم أكتب معادلة ديكرتية له .

(3) أ) عين طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

ب) بين أن النقطة S لا تنتمي الى المستوي (ABC) ، ثم أحسب المسافة $d(S, (ABC))$.

ج) أحسب حجم رباعي الوجوه $SABC$.

(4) أ) أكتب معادلة لسطح الكرة (Γ) التي قطرها $[BC]$.

ب) عين طبيعة وعناصر مجموعة النقط من الفضاء تقاطع سطح الكرة (Γ) والمستوي $p(O; \vec{i}, \vec{j})$.

التمرين الثاني: (4 نقط)

f الدالة المعرفة على المجال $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ ،

تمثيلها البياني في معلم متعامد كما هو موضح بالشكل .

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$.

(1) باستخدام التمثيل البياني المرفق مثل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبينا خطوط الإنشاء .

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(3) برهن بالتراجع من أجل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.

II. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$.

① بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول v_0

② أكتب بدلالة n ثم استنتج أن : $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}}$.

③ أحسب العددين : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $S'_n = \frac{(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)}{u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n}$.

التمرين الثالث: (5 نقط)

(I) عين عددين مركبين α و β حيث :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 8 \\ i\alpha - i\beta = -2 \end{cases}$$

(II) نعتبر النقط A, B, C, D حيث : $z_A = -i + 4, z_B = 4 + i, z_C = 1 + 2i, z_D = -i$.

1. أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الجبري ثم استنتج طبيعة المثلث BCD .

2. أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه النقطة A ويحول B الى D .
ب) أحسب z_E لاحقة النقطة E علما أن O هي صورة E بالتشابه S .

3. بين أن النقط A, B, C, D تنتمي الى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

4. (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|2iz + 2 - 9i| = 1$.

أ) تحقق أن النقطة B تنتمي الى (Γ)

ب) عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة.

5. عين وأرسم مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\arg(z + i) = \arg(\bar{z} - i) + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الرابع: (7 نقط)

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة التي ترتيبها 0.

4) برهن أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب حساب إحداثياتها.

5) بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلين α و β حيث : $0.4 \leq \alpha \leq 0.5$ و $5.3 \leq \beta \leq 5.4$ فسر الحلين بيانيا.

6) أرسم (T) و (C_f) .

7) أ) بين أن الدالة $H : x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h : x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$

ب) بملاحظة أن : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ ، استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ج) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات : $x=1, y=0, x=3$.

(II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}$.

أ) بين أن g دالة فردية وفسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن $g(x) = f(x)$ في مجال يطلب تعيينه ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g دون دراسة دالتها المشتقة.

ج) بين كيف يمكنك رسم (C_g) اعتمادا على المنحني (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني.