

التمرين 1: (05 نقاط)

- 1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 10z + 29 = 0$
- 2- A ، B و C نقط من المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لاحقتها على الترتيب: $z_A = 3$ ، $z_B = 5 - 2i$ و $z_C = 5 + 2i$
- أ- علم النقط A ، B و C
- ب- أكتب العدد $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري. استنتج أن ABC مثلث قائم و متساوي الساقين.
- ج- استنتج أن صورة B بدوران R مركزه A ، عين زاويته.
- 3- أ- عين وأنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\frac{z-3}{z-5+2i}$ عدد حقيقي سالب تماماً.
- ب- عين وأنشئ (Δ') صورة (Δ) بالدوران R
- 4- لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg \left[\left(\frac{z_C - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi$ مع k عدد صحيح
- أ- تحقق أن A تنتمي إلى (Γ)
- ب- عين وأنشئ (Γ)

التمرين 2: (04 نقاط)

- لدى لاعب زهرة نرد ذات ستة أوجه متجانسة مرقمة من 1 إلى 6 و ثلاثة صناديق U_1 ، U_2 و U_3 يحتوي كل منها k كرة، k عدد طبيعي أكبر أو يساوي 3.
- توجد 3 كرات سوداء في U_3 ، كرتين سوداوين في U_2 و كرة سوداء وحيدة في U_1 وكل الكرات المتبقية في الصناديق بيضاء. كل الكرات غير معروفة عند اللمس.
- تجري اللعبة بالطريقة التالية: يرمي اللاعب زهرة النرد.
- إذا كان الرقم المحصل عليه 1، يسحب عشوائياً كرة من U_1 ، يكتب لونها ثم يعيدها للصندوق U_1 .
 - إذا كان الرقم المحصل عليه مضاعف لـ 3، يسحب عشوائياً كرة من U_2 ، يكتب لونها ثم يعيدها للصندوق U_2 .
 - إذا كان الرقم المحصل عليه ليس 1 وليس مضاعفاً لـ 3، يسحب عشوائياً كرة من U_3 ، يكتب لونها ثم يعيدها لـ U_3
- نرمز بـ A ، B ، C و N للحوادث التالية:
- A : "ظهور الرقم 1 في زهرة النرد"
- B : "ظهور مضاعف للعدد 3 في زهرة النرد"
- C : "ظهور رقم ليس 1 وليس مضاعفاً للعدد 3 في زهرة النرد"
- N : "الكرة المسحوبة سوداء"
- نذكر أن: $p_A(B)$ هو احتمال الحصول على B علماً أن A محققة مع $p(A) \neq 0$.
- 1- يجري اللاعب لعبة.

- أ- بين أن احتمال أن يحصل على كرة سوداء هو $\frac{7}{3k}$
- ب- أحسب احتمال أن يظهر الرقم 1 في زهرة النرد علماً أن الكرة المسحوبة سوداء.
- ج- عين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء أكبر من $\frac{1}{2}$
- د- عين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{30}$
- 2- في هذا السؤال، k يساوي القيمة المحصل عليها لما يكون احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{30}$. يقوم اللاعب بـ 20 لعبة، مستقلة مثلي مثلي. أحسب، على شكل مضبوط ثم قيمة مقربة بتقريب 10^{-3} ، احتمال أن يحصل على الأقل مرة على كرة سوداء

التمرين 3: (04 نقاط)

1. أ - بين أن النقط $A(2;0;1)$ ، $B(3;1;2)$ ، $C(4;1;-2)$ ، $D(5;-6;1)$ نقط من الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
 ب - عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 ج - بين أن المثلث ABC مثلث قائم و أحسب مساحته.
 2. (P) مستوي معادلته : $4x - 5y + z - 9 = 0$
 أ - أحسب المسافة بين D و المستوي (P)
 ب - أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$
 3. أ - عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة D و العمودي على المستوي (P)
 ب - عين إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P)
 ج - أستنتج المسافة بين A و المستقيم (Δ)
 4. (S) سطح كرة مركزه D و يقطع (P) حسب دائرة مركزها H و تشمل A .
 عين نصف قطر (S) ثم أكتب معادلة لسطح الكرة (S)

التمرين 4: (07 نقاط)

- الجزء I : نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + e^{-x}$
 نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 1. أ - أحسب نهاية f عند $+\infty$
 ب - بين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته.
 ج - أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)
 2. أدرس اتجاه تغيرات f على $[0; +\infty[$ وانجز جدول تغيراتها
 3. أنشئ (Δ) و (C_f)
 الجزء II : (u_n) متتالية حدودها موجبة، معرفة بـ: $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
 1. أ - أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - \ln(1+x)$
 ب - استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $\ln(x+1) \leq x$
 ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n}$
 2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f(\ln n) = \ln n + \frac{1}{n}$
 3. أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln n \leq u_n$
 ب - استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$
 4. فيما تبقى من التمرين ، نتقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$
 أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $k \geq 2$ ، $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$
 ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$
 ج - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$
 د - برهن أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 2}$ المعرفة بـ $v_n = \frac{u_n}{\ln n}$ متقاربة وتقارب 1

انتهى الموضوع

-1- حلول المعادلة : $z^2+10z+29=0$: (05 نقاط) 0,50

$$\Delta=100-116=-16=(4i)^2 \quad z_1=5+2i \quad , \quad z_2=5-2i$$

مجموعة الحلول: $S = \{5 + 2i; 5 - 2i\}$

-2- 0,25 **أ - تعليم النقط A, B, C :**

ب - كتابة العدد $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري : 0,50

$$\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = \frac{5+2i-5+2i}{5-2i-3} = \frac{4i}{2-2i} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = -1 + i$$

- استنتاج أن ABC مثلث قائم و متساوي الساقين : 0,50

$$\left\{ \begin{array}{l} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_B + z_B - z_A}{z_B - z_A} = i \Leftrightarrow \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} + 1 = i \Leftrightarrow \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = -1 + i$$

ولدينا: $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = -1 + i$

ج - استنتاج أن C صورة B بدوران R مركزه A ، عين زاويته : 0,50

$$R(B)=C \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow C \text{ صورة } B \text{ بدوران } R \text{ مركزه } A \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2} \text{ أي } R(B)=C$$

-3- أ - تعيين وأنشاء (Δ) : 0,25+0,50

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \frac{z-3}{z-5+2i} = k \Leftrightarrow \frac{z-3}{z-5+2i} = k \text{ مع } k \text{ عدد حقيقي سالب تماماً}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM} \\ k < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_M - z_A = k(z_M - z_B) \\ k < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} = k \\ k < 0 \end{array} \right\}$$

$\Leftrightarrow$ الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ لهما نفس المنحى واتجاهين متعاكسين

(Δ) هي القطعة $]AB[$ أي $\Delta =]AB[$ (القطعة $[AB] - \{A; B\}$)

ب - تعيين وأنشاء (Δ') : 0,25+0,50

$$R(B)=C \text{ و } R(A)=A \Leftrightarrow (\Delta') =]AC[\Leftrightarrow R(\Delta) = (\Delta')$$

-4- أ - تحقق أن A تنتمي إلى (Γ) : 0,50

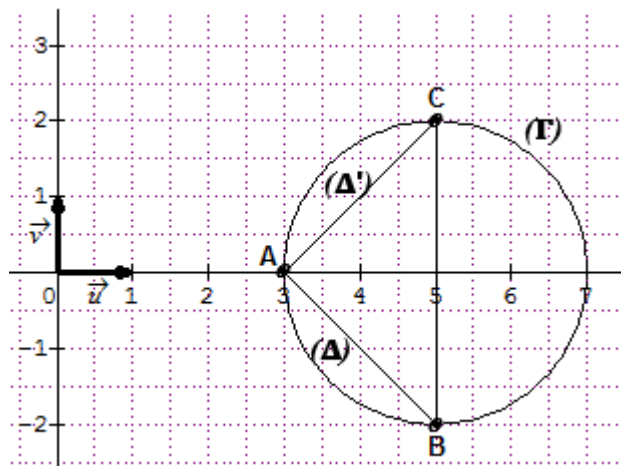
$$A \in (\Gamma) \Leftrightarrow \arg \left[\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right)^2 \right] = \arg \left[\left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^2 \right] = \arg(e^{i\pi}) = \pi + 2k\pi$$

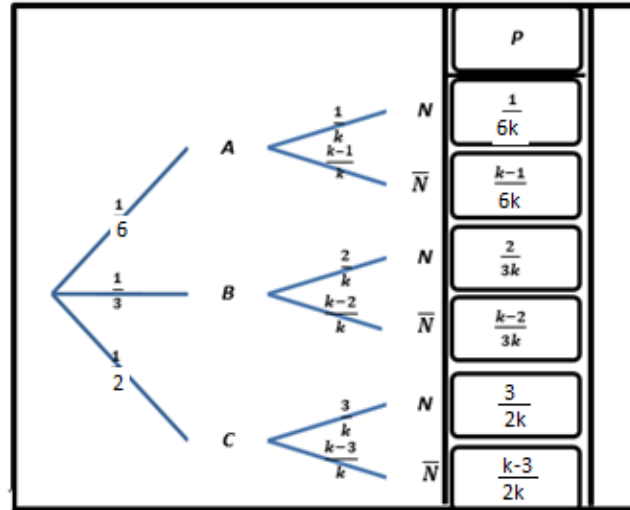
ب - تعيين وأنشاء (Γ) : 0,25+0,50

$$2\arg \left(\frac{z_C - z_M}{z_B - z_M} \right) = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \arg \left[\left(\frac{z_C - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow M(z) \in (\Gamma)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC} \\ M \neq B \text{ و } M \neq C \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_C - z_M}{z_B - z_M} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$$

(Γ) : الدائر التي قطرها $[CB]$ ما عدا B و ما عدا C





1- أ - تبيان أن احتمال أن يحصل على كرة سوداء هو $p(N) = \frac{1}{6k} + \frac{2}{3k} + \frac{3}{2k} = \frac{14}{6k} = \frac{7}{3k} : \frac{7}{3k}$ 0,50

ب - حساب احتمال أن يظهر الرقم 1 في زهرة النرد علما أن الكرة المسحوبة سوداء: $p_N(A) = \frac{p(A \cap N)}{p(N)} = \frac{(\frac{1}{6k})}{(\frac{7}{3k})} = \frac{1}{14}$ 0,50

ج - تعيين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء أكبر من $\frac{1}{2}$: 0,50

$$k = 4 \text{ أو } k = 3 \Leftrightarrow 3 \leq k \leq \frac{14}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{3k} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow p(N) \geq \frac{1}{2}$$

د - تعيين k حتى يكون احتمال الحصول على كرة سوداء يساوي $\frac{1}{30}$: 0,50

$$k = 70 \Leftrightarrow \frac{7}{3k} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow p(N) = \frac{1}{30}$$

2- في هذا السؤال، $k = 70$ يقوم اللاعب بـ 20 لعبة، مستقلة مثنى مثنى. حساب، على شكل مضبوط ثم قيمة مقربة بتقريب 10^{-3} ، احتمال أن يحصل على الأقل مرة على كرة سوداء: 01

ليكن X عدد المرات التي يحصل فيها اللاعب على كرة سوداء خلال 20 لعبة.

X يتبع قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين $n = 20$ و $p = p(N) = \frac{1}{30}$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{30}\right)^{20} \cong 0,492$$

التمرين 3: (04 نقاط)

1. أ - تبيان أن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة: 0,50

$$\vec{AC}(2; 1; -3), \vec{AB}(1; 1; 1)$$

لدينا: $\vec{AB} \neq \frac{1}{2} \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا $\Leftrightarrow A, B, C$ ليست على استقامة واحدة

ب - معادلة ديكارتية للمستوى (ABC): 0,50

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) \neq (0; 0; 0) \text{ مع } (ABC) \text{ مع } \vec{n}(a; b; c) \text{ شعاع ناظمي للمستوي}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$b = -5c \Leftrightarrow 5c + b = 0 \text{ وبالتعويض نجد: } a = 4c \Leftrightarrow -a + 4c = 0$$

$$\text{بوضع } c = 1 \text{ نجد: } a = 4 \text{ و } b = -5$$

$$\text{ومنه } \vec{n}(4; -5; 1) \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (ABC) \Leftrightarrow (ABC): 4x - 5y + z + d = 0$$

$$\text{لدينا: } d = -9 \Leftrightarrow 4(2) - 5(0) + (1) + d = 0 \Leftrightarrow A \in (ABC)$$

$$\text{وبالتالي } (ABC): 4x - 5y + z - 9 = 0$$

ج - تبيان أن المثلث ABC مثلث قائم وحساب مساحته: 0,50+0,50

$$\text{لدينا: } BC = \sqrt{17}, AC = \sqrt{14}, AB = \sqrt{3}$$

$$ABC \text{ مثلث قائم في } A \text{ (حسب مبرهنة فيثاغورس)} \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 3 + 14 = 17 = BC^2$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{42}}{2} u. a.$$

2. $(P)=(ABC): 4x - 5y + z - 9 = 0$

أ - حساب المسافة بين D والمستوي (P) : 0,25.....

$$d(D; (P)) = \frac{|4(5) - 5(-6) + (1) - 9|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \frac{42}{\sqrt{42}} = \sqrt{42}$$

ب - حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: 0,25.....

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times d(D; (P)) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{42}}{2} \times \sqrt{42} = 7 u.v.$$

3. أ - تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : 0,50.....

$$(P) \perp (\Delta) \Leftrightarrow \vec{n}(4; -5; 1) \cdot \vec{r}(x; y; z) = 0 \Rightarrow 4x - 5y + z - 9 = 0$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = -5t - 6 \\ z = t + 1 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

ب - إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) : 0,50.....

H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) هي نقطة تقاطع (P) و (Δ) ، إحداثياتها هي حلول الجملة:

$$\begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = -5t - 6 \\ z = t + 1 \\ 4x - 5y + z - 9 = 0 \end{cases}$$

بالتعويض نجد: $4(4t+5) - 5(-5t-6) + (t+1) - 9 = 0 \Rightarrow 42t = -42 \Rightarrow t = -1$ ومنه $H(1; -1; 0)$

ج - استنتاج المسافة بين A والمستقيم (Δ) : 0,25.....

$$d(A; (\Delta)) = AH = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

4. (S) سطح كرة مركزه D ويقطع (P) حسب دائرة مركزها H وتشمل A .

تعيين نصف قطر (S) ومعادلة لسطح الكرة (S) : 0,25+0,25.....

نصف قطر (S) هو $DA = 3\sqrt{5}$ و $(S): (x-5)^2 + (y+6)^2 + (z-1)^2 = 45$

التمرين 5: (07 نقاط)

الجزء I : نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + e^{-x}$

1. أ - حساب نهاية f عند $+\infty$: 0,25.....

$$\lim_{+\infty} f = +\infty$$

أ - تبيان أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) : 0,50.....

$$(C_f) \Leftrightarrow \lim_{+\infty} [f(x) - x] = \lim_{+\infty} e^{-x} = 0$$

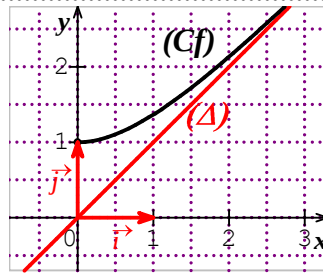
أ - وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : 0,25.....

$$f(x) - x = e^{-x} > 0 \Leftrightarrow (C_f) \text{ يقع فوق } (\Delta)$$

2. اتجاه تغير f على $[0; +\infty[$: 0,50.....

لدينا: $f'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0; +\infty[; f$ متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$

جدول تغيرات f : 0,25..... $f(0)=1$



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	1	$+\infty$

3. انشاء (Δ) و (C_f) : 0,50+0,50.....

الجزء II : (u_n) متتالية حدودها موجبة، معرفة بـ: $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - \ln(1+x)$

أ - اتجاه تغير الدالة g : 0,50.....

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0; +\infty[; g$$

ب - استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $\ln(x+1) < x$: 0,25.....

$$\ln(x+1) < x \Leftrightarrow x - \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow x > 0$$

ج - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(n+1) < \ln n + \frac{1}{n}$: 0,50.....

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \ln(n+1) < \ln n + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

2. البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f(\ln n) = \ln n + \frac{1}{n}$ 0,50

$$f(\ln n) = \ln n + e^{-\ln n} = \ln n + \frac{1}{e^{\ln n}} = \ln n + \frac{1}{n}$$

3. أ - البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln n \leq u_n$ 0,50

- نتحقق من أنها صحيحة من أجل $n = 0$
لدينا: $u_1 = 0$ و $\ln 1 = 0$ (صحيحة)

- نفرض أنها صحيحة من أجل n أي $\ln n \leq u_n$

- نبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي $\ln(n+1) \leq u_{n+1}$

$$\text{لدينا: } \ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n} \iff \begin{cases} \ln(n+1) \leq f(\ln n) \\ f(\ln n) \leq f(u_n) \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n} \\ \ln n \leq u_n \end{cases}$$

$$\ln(n+1) \leq f(u_n) \iff \ln(n+1) \leq f(u_n) \iff \ln(n+1) \leq u_{n+1} \text{ (صحيحة)}$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln n \leq u_n$

ب - استنتاج نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$: 0,25

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \begin{cases} \forall n > 0; u_n \geq \ln n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty \end{cases} \text{ لدينا:}$$

4. فيما تبقى من التمرين ، نتقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$

أ - البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي $k \geq 2$ ، $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$ 0,50

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{k-1} dx \iff \forall k \geq 2; \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k-1} \iff \forall k \geq 2; k-1 \leq x \leq k$$

$$\iff \forall k \geq 2; \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \text{ ومنه } \frac{1}{k} (k - (k-1)) \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k-1} (k - (k-1))$$

ب - استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$ 0,50

$$\text{لدينا: } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{4} \leq \int_3^4 \frac{1}{x} dx \\ \dots \\ \frac{1}{n-1} \leq \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x} dx \end{cases}$$

$$\text{بالجمع نجد: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx \iff 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$$

$$\iff 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + [\ln x]_1^{n-1} \iff$$

$$\forall n \geq 2; u_n \leq 1 + \ln(n-1) \iff \forall n \geq 2; \begin{cases} u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 + \ln(n-1) \end{cases} \text{ لدينا:}$$

ج - البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$ 0,25

من السؤالين (3) و (4) نستنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $\ln n \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$

د - البرهان أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 2}$ المعرفة بـ $v_n = \frac{u_n}{\ln n}$ متقاربة وتقترب لـ 1 0,50

$$\text{لدينا: } \forall n \geq 2; 1 \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n-1)}{\ln n} \iff \forall n \geq 2; \ln n \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$$

$$\iff \forall n \geq 2; 1 \leq v_n \leq \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln[n(1-\frac{1}{n})]}{\ln n} \iff$$

$$\iff \forall n \geq 2; 1 \leq v_n \leq \frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n} \iff$$

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1 \iff \begin{cases} \forall n \geq 2; 1 \leq v_n \leq \frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \text{المتتالية } (v_n)_{n \geq 2} \text{ المعرفة بـ } v_n = \frac{u_n}{\ln n} \text{ متقاربة وتقترب لـ 1}$$