ثـانويـة : ..... العـام الدراسـي : 2019/2018

المستوى : 3 رياضي + 3 تقني رياضي المـدة : سـاعتـان

إختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول : (06 نقاط)

فيمـا يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل مرّة :

1) نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0;2\pi]$ كما يلي : $f(x)=e^{-x}.\sin x$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في م.م.م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

- من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;2\pi]$ تكون : $f'(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$.
- من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;2\pi]$ تكون : $f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}.\cos(x+\frac{\pi}{4})$.
- المماس للمنحني (C_f) عند المبدأ معادلته هي : $y=x$.
- من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;2\pi]$ يكون : المنحني (C_f) يقع بين المنحنيين (C_g) وَ (C_h) حيث : $g(x)=e^{-x}$ وَ $h(x)=-e^{-x}$.
- المنحنيان (C_f) وَ (C_g) لهما نقطة مشتركة وحيدة فاصلتها هي : π .

2) نعتبر الدالة k المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$ ، (C_k) منحناها البياني في م.م.م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- المبدأ O هو مركز التناظر للمنحني (C_k) .
- $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=+\infty$.
- من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $k'(x)=\frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.
- من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$ ، تكون : $k(x)>0$.
- المعادلة : $k(x)=1$ لا تقبل حلولاً على المجال $[0;1]$.

التمرين الثاني : (08 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$.

و ليكن (C) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأوّل :

1) أ) أحسب كلاً من : $f'(x)$ وَ $f''(x)$.

ب) إستنتج تغيّرات الدالة f' .

ج) بيّن أنّ المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α ، حيث : $-1,3<\alpha<-1,2$.

د) إستنتج إشارة $f'(x)$ وَ تغيّرات الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّرات هذه الأخيرة .

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أنشئ كلاً من (Δ) وَ (C) .

الجزء الثاني :

نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، المتتالية (u_n) كالآتي : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

1) أ) باستعمال المنحنى (C) و المستقيم (Δ) عيّن على محور الفواصل : u_0 ، u_1 ، u_2 .

ب) أعط تخمينا حول إتجاه و تقارب المتتالية (u_n) .

2) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $-1<u_n\leq 0$.

ب) برهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ، ثمّ استنتج أنّ لها نهاية l لا يطلب حسابها .

3) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $0<u_{n+1}+1\leq\frac{3}{4}(u_n+1)$.

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $0<u_n+1\leq(\frac{3}{4})^n$. ماهي إذن نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

التمرين الثالث : (06 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$.

1) أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ وَ $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g وَ شكل جدول تغيّراتها ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=e^{-2x}.\ln(1+e^{2x})$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f'(x)=2e^{-2x}\times g(2x)$.

2) بوضع : $X=1+e^{2x}$ ، بيّن أنّ : $f(x)=\frac{X}{X-1}\times\frac{\ln X}{X}$. إستنتج عندئذٍ نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، (يمكن وضع : $h=e^{2x}$) .

4) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

5) ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❖ $(1cm)$ هي الوحدة على محور الفواصل ، $(4cm)$ هي الوحدة على محور التراتيب .

أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب) أنشئ (T) و المنحني (C_f) .

بالتوفيق للجميع ..... الأستــاذ : ب.ع

المستوى : 3 رياضي + 3 تقني رياضي العـام الدراسـي :
2019/2018

الحل النموذجي لإختبار الثلاثي الأول المقترح

حل التمرين الأول :

الإجـابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل مرّة :

1) لدينا : الدالة f المعرّفة على $[0;2\pi]$ كما يلي : $f(x)=e^{-x}.\sin x$.

أ) **خطـــأ** ، لأنّ : $f'(x)=-e^{-x}\times\sin x+\cos x\times e^{-x}$ ، و منه : $f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$.

ب) **صحيـــح** ، لأنّ : $f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}.\cos(x+\frac{\pi}{4})$ ، أي : $f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}(\cos x.\cos(\frac{\pi}{4})-\sin x.\sin(\frac{\pi}{4}))$

أي : $f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})$ ، و منه : $f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$.

ج) **صحيـــح** ، لأنّ : المماس للمنحنى (C_f) عند المبدأ هو : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، لدينا : $\begin{cases}f'(0)=1\\f(0)=0\end{cases}$

و منه : $y=x$ هو المماس للمنحنى (C_f) عند المبدأ .

د) **صحيـــح** ، لأنّ : $-1\le\sin x\le 1$ ، أي : $-e^{-x}\le e^{-x}.\sin x\le e^{-x}$ ، و منه : $h(x)\le f(x)\le g(x)$.

إذن : المنحنى (C_f) يقع بين المنحنيين (C_g) وَ (C_h) .

و) **خطـــأ** ، لأنّ : لنحل المعادلة $f(x)=g(x)$ ، أي : $e^{-x}.\sin x=e^{-x}$ ، أي : $e^{-x}.\sin x-e^{-x}=0$ ، أي :

$e^{-x}(\sin x-1)=0$ ، أي : $\sin x-1=0$ ، أي : $\sin x=1$ ، و منه : $x=\frac{\pi}{2}$.

2) لدينا : الدالة k المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$.

أ) **خطـأ** ، لأنّ : $k(-x)=k(x)$ ، أي : الدالة k زوجية ، إذن : المنحني (C_k) له محور تناظر هو حامل محور التراتيب

ب) **خطـــأ** ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=-\infty$ ، لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2x^2}{x^2+1})=2$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(x^2+1)=-\infty$.

ج) **صحيـــح** ، لأنّ : $k'(x)=\frac{4x(x^2+1)-2x(2x^2)}{(x^2+1)^2}-\frac{2x}{x^2+1}$ ، أي : $k'(x)=\frac{4x^3+4x-4x^3}{(x^2+1)^2}-\frac{2x(x^2+1)}{x^2+1}$

أي : $k'(x)=\frac{4x-2x^3-2x}{(x^2+1)^2}$ ، أي : $k'(x)=\frac{2x-2x^3}{(x^2+1)^2}$ ، أي : $k'(x)=\frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

❖ و منه : $k'(x)=\frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

د) **خطـــأ** ، لأنّ : من أجل كل $x \in [0;1]$ يكون : $2x \geq 0$ وَ $1-x \geq 0$ وَ $1+x > 0$.

و منه : $k'(x) \geq 0$ ، أي :

x	0		1
$k'(x)$	0	$+$	0
$k(x)$	0	↗	$1-ln(2)$

إذن : من أجل كل $x \in [0;1]$ ، يكون : $k(x) \geq 0$.

و) **صحيـــح** ، لأنّ : لدينا : $0 \leq x \leq 1$ أي : $k(0) \leq k(x) \leq k(1)$ ، و منه : $0 \leq k(x) \leq 0,3$.

إذن : المعادلة $k(x) = 1$ لا تقبل حلولاً على المجال $[0;1]$.

حل التمرين الثاني :

لدينا الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$.

الجزء الأوّل :

1) أ) حساب : $f'(x)$ وَ $f''(x)$.

*) $f'(x) = 1 - \frac{1}{4}\left[e^{-x} - e^{-x}(x+1)\right]$ ، أي : $f'(x) = 1 - \frac{1}{4}e^{-x}\left[1-(x+1)\right]$ ، و منه : $f'(x) = 1 + \frac{1}{4}x.e^{-x}$.

*) $f''(x) = \frac{1}{4}e^{-x} - e^{-x} \times \frac{1}{4}x$ ، و منه : $f''(x) = \frac{1}{4}e^{-x}(1-x)$. (إشارة $f''(x)$ من إشارة : $(1-x)$) .

ب) إستنتاج تغيّرات الدالة f' :

*) $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x \to -\infty}(\frac{1}{4}x) = -\infty$ وَ $\lim_{x \to -\infty}(e^{-x}) = +\infty$.

*) $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1$ ، لأنّ : $\lim_{x \to +\infty}\left[1 + \frac{1}{4}x.e^{-x}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[1 + \frac{1}{4} \times \frac{x}{e^x}\right] = 1$ ، ($\lim_{x \to +\infty}(\frac{x}{e^x}) = 0$) .

*) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	$f'(1)$	↘	1

$f'(1) = 1 + \frac{1}{4}e^{-1}$

ج) الدالة f' مستمرة و رتيبة على المجال $[-1,3;-1,2]$ وَ $\begin{cases} f'(-1,3) = -\dots \\ f'(-1,2) = +\dots \end{cases}$ أي : $f'(-1,3) < 0 < f'(-1,2)$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ، حيث : $-1,3 < \alpha < -1,2$.

د) إستنتاج إشارة $f'(x)$ وَ تغيّرات الدالة f ، ثمّ تشكيل جدول تغيّرات هذه الأخيرة :

نلخص الإشارة و إتجاه التغيّر في جدول التغيّرات مباشرة :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) أ) بيّان أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$:

*) لنحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{4}(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}) = 0$.

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

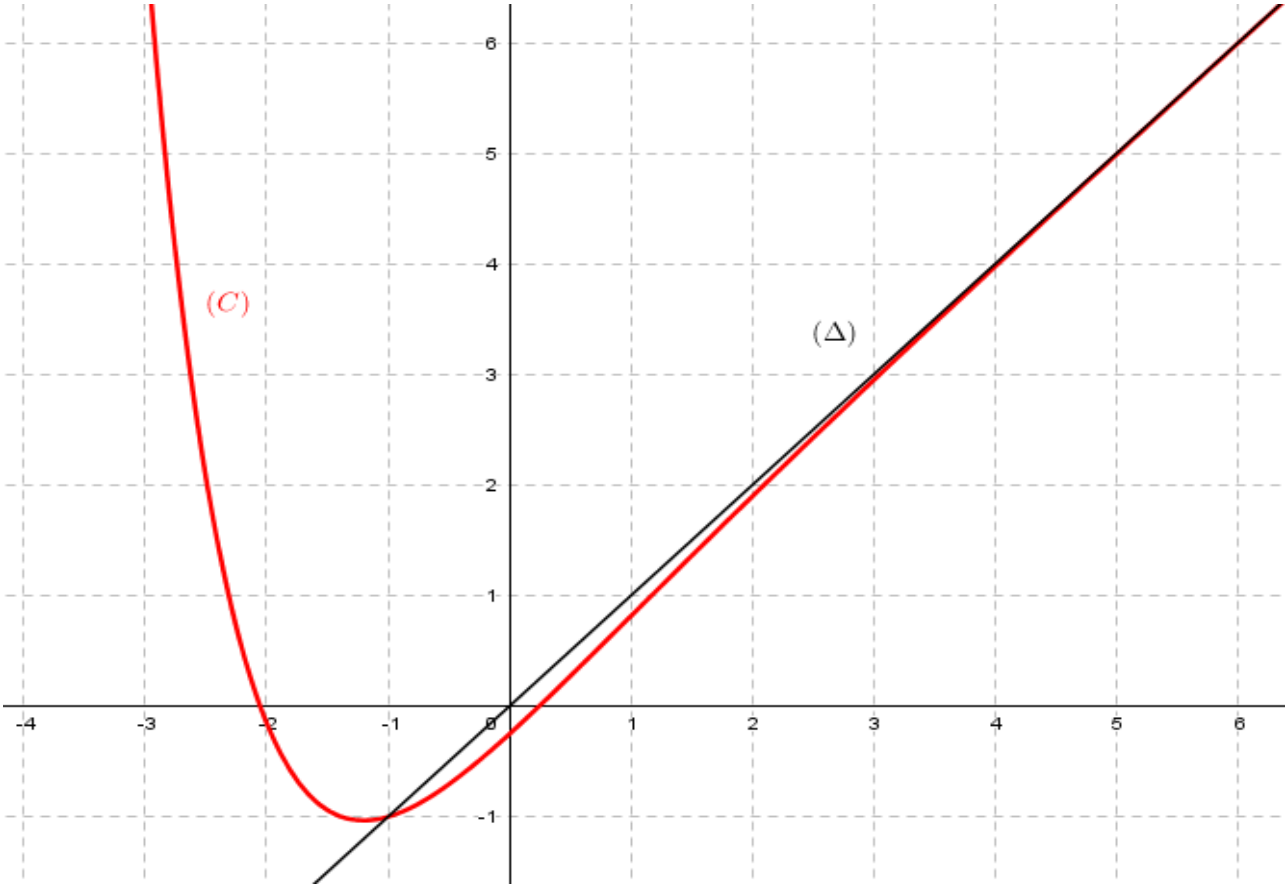
ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

*) ندرس إشارة الفرق ، أي : $f(x) - x = -\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$ ، إذن إشارة الفرق من إشارة : $-\frac{1}{4}(x+1)$.

نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$		$-$	
الوضعية		(C) يقع فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;-1)$		(C) يقع تحت (Δ)

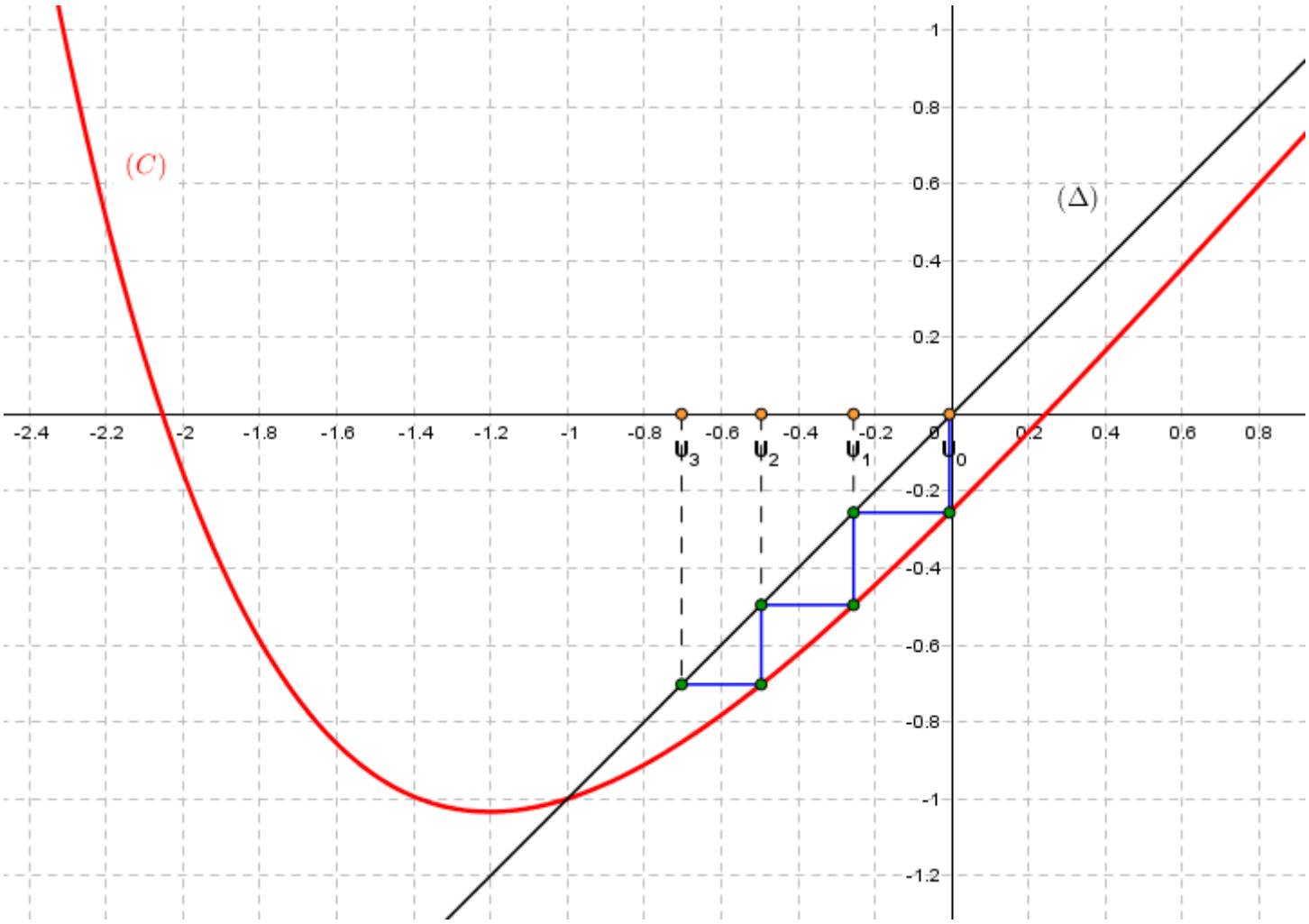
3) إنشـاء (Δ) و (C) :



الجزء الثاني :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (u_n) المعرّفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1) أ) باستعمال المنحني (C) و المستقيم (Δ) تعيّن على محور الفواصل : u_0 ، u_1 ، u_2 :



ب) إعطاء تخمين حول إتجاه و تقارب المتتالية (u_n) :

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ، و تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) و التي هي : -1 .

2) أ) برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $-1 < u_n \leq 0$:

*) نتحقّق من أجل $n = 0$: $u_0 = 0$ ، و منه : $-1 < u_0 \leq 0$ (محقّقة) .

*) نفرض أنّ : $-1 < u_n \leq 0$ وَ نثبت أنّ : $-1 < u_{n+1} \leq 0$.

لدينا فرضاً أنّ : $-1 < u_n \leq 0$ ، و نعلم أنّ الدالة f متزايدة على المجال $]-1;0]$ ، إذن : $f(-1) < f(u_n) \leq f(0)$

أي : $-1 < u_{n+1} \leq -\frac{1}{4}$ ، و منه : $-1 < u_{n+1} \leq 0$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيراً من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $-1 < u_n \leq 0$.

ب) برهان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ، ثمّ استنتاج أنّ لها نهاية l :

*) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ ، من دراسة الوضعية (سابقاً) لدينا : $f(x) - x < 0$

و ذلك من أجل كل $x > -1$ ، و بما أنّ : $u_n > -1$ فإنّه سيكون : $f(u_n) - u_n < 0$ ، أي : $u_{n+1} - u_n < 0$.

إذن نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

*) المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بـ -1 ، و منه المتتالية (u_n) متقـاربة ، أي لها نهـاية l .

3) أ) برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $0 < u_{n+1} + 1 \leq \frac{3}{4}(u_n + 1)$:

*) أوّلاً نحسب العدد : $u_{n+1} + 1 = f(u_n) + 1 = u_n - \frac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n} + 1 = (u_n + 1) - \frac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n}$ ،

و منه : $u_{n+1} + 1 = (u_n + 1)\left[1 - \frac{1}{4}e^{-u_n}\right]$.

*) ثانياً نحسب الفرق : $(u_{n+1} + 1) - \frac{3}{4}(u_n + 1)$ ، أي :

$$(u_{n+1} + 1) - \frac{3}{4}(u_n + 1) = (u_n + 1)(1 - \frac{1}{4}e^{-u_n}) - \frac{3}{4}(u_n + 1) = (u_n + 1)\left[1 - \frac{1}{4}e^{-u_n} - \frac{3}{4}\right] = (u_n + 1)(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-u_n}) = (u_n + 1)\frac{1}{4}(1 - e^{-u_n})$$

لدينا : $(u_n + 1)\frac{1}{4} > 0$ وَ بما أنّ : $1 - e^{-u_n} \leq 0$.

<u>توضيح</u> : نعلم أنّ : $-1 < u_n \leq 0$ ، أي : $0 \geq -u_n > -1$ ، أي : $1 \geq e^{-u_n} < e$ ، أي : $-1 \leq -e^{-u_n} < -e$

أي : $0 \leq 1 - e^{-u_n} < 1 - e$ ، و منه : $1 - e^{-u_n} \leq 0$.

إذن : $(u_{n+1} + 1) - \frac{3}{4}(u_n + 1) \leq 0$ ، أي : $(u_{n+1} + 1) \leq \frac{3}{4}(u_n + 1)$.

*) من البرهان بالتراجع سابقاً نستنتج أنّ : $0 < (u_{n+1} + 1) \leq \frac{3}{4}(u_n + 1)$.

ب) إستنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $0 < u_n + 1 \leq (\frac{3}{4})^n$:

لدينا : $0 < (u_{n+1} + 1) \leq \frac{3}{4}(u_n + 1)$ ، ننطلق في التعويض و الحساب :

$$0 < (u_n + 1) \leq \frac{3}{4}(u_{n-1} + 1) \text{ ،.....،} 0 < (u_2 + 1) \leq \frac{3}{4}(u_1 + 1) \text{ ،} 0 < (u_1 + 1) \leq \frac{3}{4}(u_0 + 1)$$

.

بالضرب نجد :

$$0 < (u_1 + 1)(u_2 + 1)(u_3 + 1) \times ..... \times (u_{n-1} + 1) \leq (\frac{3}{4})^n (u_0 + 1)(u_1 + 1)(u_2 + 1) \times ..... \times (u_n + 1)$$

بالإختزال نجد : $0 < (u_n + 1) \leq (\frac{3}{4})^n (u_0 + 1)$ ، بما أنّ : $u_0 = 0$ فإنّ : $0 < u_n + 1 \leq (\frac{3}{4})^n$. و هو المطلوب

*) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) : بما أنّ : $0 < u_n + 1 \leq (\frac{3}{4})^n$ وَ $\lim_{n \to +\infty} (\frac{3}{4})^n = 0$.

أي : $\lim_{n \to +\infty} (u_n + 1) = 0$ ، إذن : $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = -1$.

حل التمرين الثالث :

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$.

1) حساب نهاية الدالة g عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)=0$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}-\ln(1+e^x)=0$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)=1$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(1+e^x)=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g وَ تشيكل جدول تغيّراتها ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

*) **إتجاه التغيّر** : لنحسب $g'(x)$: $g'(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}-\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{e^x+e^{2x}-e^{2x}}{(1+e^x)^2}-\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ، أي :

$g'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}-\dfrac{e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x-e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ ، و منه : $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $g'(x)<0$ ، إذن : الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

*) **جدول التغيّرات** :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$

*) **إشارة** $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$:

نلاحظ من جدول التغيّرات أنّه من أجل كل حقيقي x تكون : $g(x)<0$.

II) لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=e^{-2x}.\ln(1+e^{2x})$.

1) تبيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f'(x)=2e^{-2x}\times g(2x)$:

*) لنحسب $f'(x)$: $f'(x)=-2e^{-2x}\times\ln(1+e^{2x})+\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\times e^{-2x}=2e^{-2x}\left[-\ln(1+e^{2x})+\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right]$ ،

و منه : $f'(x)=2e^{-2x}\times g(2x)$. و هو المطلوب ، لاحظ أنّ : $g(2x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-\ln(1+e^{2x})$.

*) بما أنّ : $g(x)<0$ على $\mathbb{R}$ فإنّه ستكون : $g(2x)<0$ على $\mathbb{R}$ ، و منه نستنتج أنّ : $f'(x)<0$.

إذن : الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيّن أنّ : $f(x)=\dfrac{X}{X-1}\times\dfrac{\ln X}{X}$ ، ثمّ إستنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$:

*) نضع : $X=1+e^{2x}$ ، أي : $X-1=e^{2x}$ ، و منه : $e^{-2x}=\dfrac{1}{X-1}$.

*) لدينا : $f(x)=e^{-2x}.\ln(1+e^{2x})$ ، أي : $f(x)=\dfrac{1}{X-1}\times\ln(X)$ ، و منه : $f(x)=\dfrac{X}{X-1}\times\dfrac{\ln X}{X}$.

إذن : $f(x)=\dfrac{X}{X-1}\times\dfrac{\ln X}{X}$ ، و هو المطلوب .

*) إستنتاج النهاية عند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left[\dfrac{X}{X-1}\times\dfrac{\ln X}{X}\right]=0$.

لأنّ : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{X-1}=1$ وَ $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$.

3) حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$:

*) لنضع : $h=e^{2x}$ ، و منه : $\begin{cases}x\to-\infty\\ h\to 0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x}.\ln(1+e^{2x})=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\times\ln(1+h)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$ ، لأن : $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$.

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

4) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	↘	0

5) ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

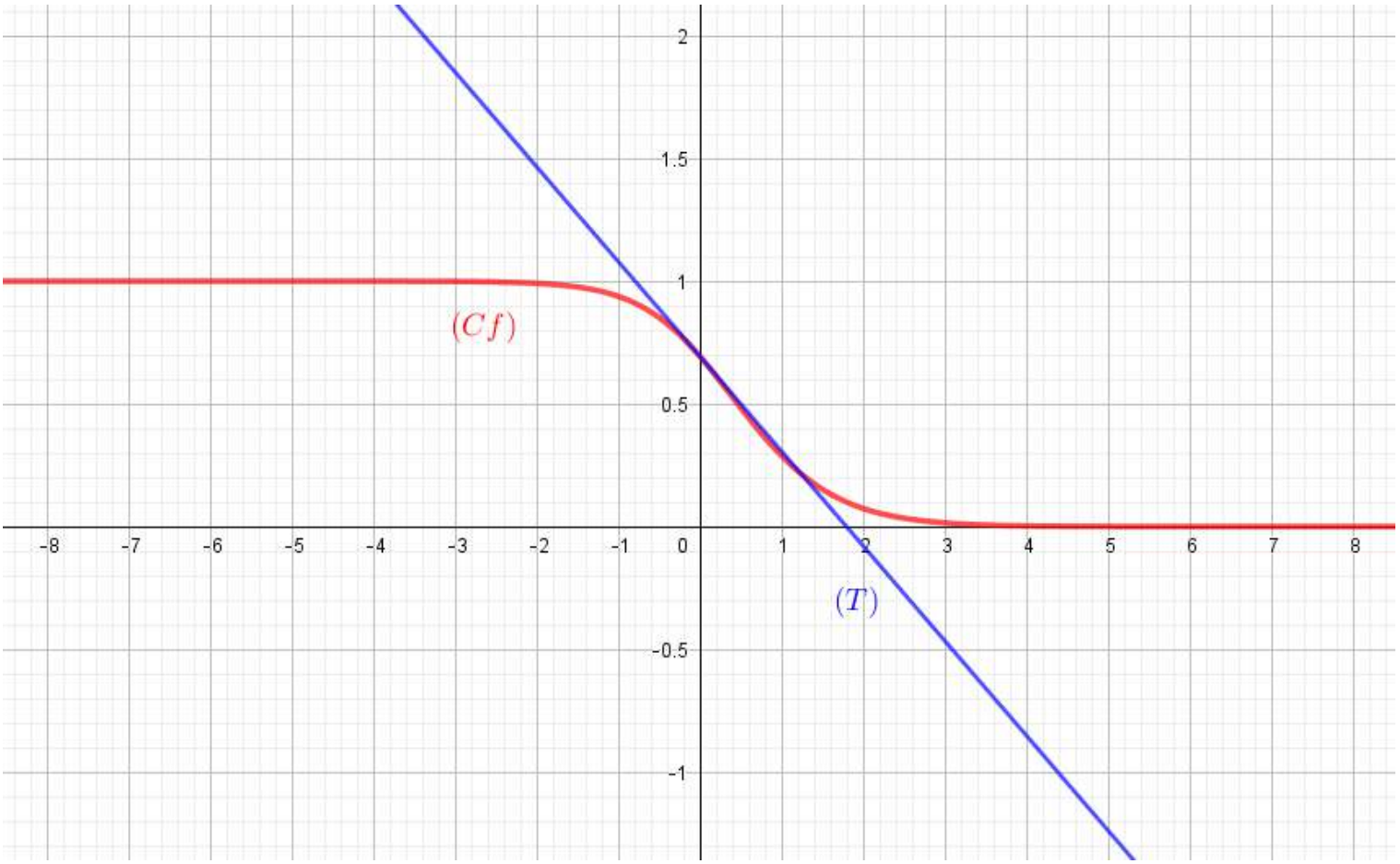
❖ $(1cm)$ هي الوحدة على محور الفواصل ، $(4cm)$ هي الوحدة على محور التراتيب .

أ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، و منه : $(T): y=(-2\ln(2)+1)x+\ln 2$.

لأنّ : $\begin{cases}f'(0)=-2\ln(2)+1\\ f(0)=\ln 2\end{cases}$.

ب) إنشـاء (T) و المنحني (C_f) :



بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2019 ..... الأستـاذ : ب.ع