

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

متقن عبد السلام حسين عين وسارة

وزارة التربية الوطنية

دورة: ماي 2018

امتحان البكالوريا التجريبية

الشعبة: علوم تجريبية.

المدة: 3 سا و 30 دقيقة

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة $A(-2; 8; 4)$ والشعاع $\vec{u}(1; 5; -1)$
- (1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{u}$.
- (2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $(P): x - y - z = 7$ و $(Q): x - 2z = 11$.
- (أ) بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) يتقاطعان في مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
- (ب) بيّن أنّ المستقيمين (d) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.
- (3) H و H' نقطتان من الفضاء حيث: $H(-3; 3; 5)$ و $H'(3; 0; -4)$.
- (أ) تحقق أنّ H تنتمي إلى (d) و H' تنتمي إلى (Δ) .
- (ب) برهن أنّ المستقيم (HH') عمودي على كل من المستقيمين (d) و (Δ) .
- (ج) احسب المسافة بين المستقيمين (d) و (Δ) .
4. عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH'} = 126$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- (1) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ النقط A, B, C لاحقاتها:
- $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 2$ على الترتيب.
- (أ) بيّن أنّ النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A, B, C .
- (ب) بيّن أنّ $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج أنّ B هي صورة A بدوران مركزه C يُطلب تعيين زاويته.
- (2) (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $z = 2(-1 + e^{i\theta})$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.
- (أ) بيّن أنّ (Γ) هي دائرة يُطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها.
- (ب) تحقق أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ) .
- (3) S التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.
- (أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S .
- (ب) نسمي D صورة النقطة A بالتشابه S ؛ بيّن أنّ لاحقة النقطة D هي: $z_D = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$
- (ج) اكتب z_A ثم z_D على الشكل الأسّي واستنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $I = [0;1]$ بـ: $h(x) = 2x - x^2$.

(1) أ) بين أن الدالة h متزايدة تماما على المجال I .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I فإن $h(x)$ ينتمي إلى I .

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = \frac{3}{7}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = h(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 - u_n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n^2$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0^{2^n}$.

ج) استنتج u_n بدلالة n ؛ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) استنتج أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f)

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ) .

ج) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يُطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

(4) أ) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$.

ب) احسب $f(-1)$ ثم ارسم (T) ، (Δ) و (C_f) .

(5) m وسيط حقيقي، ناقش بيانها وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $xe^{-x+2} - 1 - m = 0$.

(6) أ) بين أن الدالة $x \mapsto (-x-1)e^{-x+2}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x = 2 \text{ و } x = 3.$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها

على الترتيب: $z_A = 1+i$ ، $z_B = -1+3i$ ، $z_C = -3+i$ و $z_D = 1+5i$.

(1) h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A إلى C ، عيّن z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز التحاكي h .

(2) لتكن E مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

أ) عيّن z_E و z_I لاحقتي النقطتين E و I على الترتيب.

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$

(3) أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_I - z_A}{z_E - z_D}$ على الشكل الأسّي.

ب) استنتج نسبة وزاوية التشابه S الذي يحول E إلى I ويحول D إلى A .

(4) K نقطة من المستوي تحقق : $z_K - z_D = -2e^{i\frac{\pi}{6}}(z_I - z_A)$

أثبت أن K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D يطلب تعيين زاوية له.

(5) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $z - 1 - i = \frac{4}{z - 1 + i}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$

(1) احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

(2) أ) بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n > 0$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

(3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع $v_n = \frac{u_n}{n}$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1 .

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = \frac{n}{2^n}$

(4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x) - x \ln 2$

أ) عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس به خمس كريّات حمراء تحمل الأعداد 2، 2، 2، 2، -2، 3 وأربع كريّات خضراء تحمل الأعداد 3، 3، 3، -2 وكرة زرقاء تحمل العدد -1.

نسحب من الكيس بطريقة عشوائية كرتين في آن واحد.

(1) احسب احتمال الحصول على:

أ) كرتين من نفس اللون

ب) كرتين من لونين مختلفين

ج) كرتين تحملان عددين جداولهما سالب.

(2) نعرف من أجل كل سحبة من السحبات السابقة المتغير العشوائي X كما يلي:

- إذا سحبنا كرتين تحملان نفس العدد نرفق له العدد نفسه

- إذا سحبنا كرتين تحملان عددين مختلفين نرفق له العدد الأكبر

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضي.

التمرين الرابع: (04 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

(3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(4) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

ب) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,9 < \alpha < 4$.

ج) ارسم (T) والمنحنى (C_f) .

(5) ناقش بياننا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = x - 3m$.

(6) F دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $F(x) = (-3-x)\ln(x+1) + 3x$

أ) بيّن أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

ب) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما

$x = \alpha$ و $x = 0$

- بيّن أن: $A(\alpha) = 4 \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1} \right) cm^2$ ثم أوجد حصرًا لـ $A(\alpha)$.