

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

(1) حلّ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(z + \sqrt{3} - 3i)(z^2 - 6z + 12) = 0$.
(2) يُنسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$. نعتبر النقاط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.

أ- أكتب كلاً من z_A و z_C و $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث OAC .

ب- أحسب $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1439} - \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{2018}$ (تعلّل النتيجة النهائية على الشكل الجبري).

(3) لكن النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى محور الفواصل بين أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان

(4) عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه $E(3 - \sqrt{3}, 0)$ و يحوّل النقطة A إلى النقطة C

(5) بيّن أن النقاط A, O, E, C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

التمرين الثاني: (03 نقط)

كيس A يحتوي على 6 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية: 1، 2، 2، 2، 4، 4

و كيس B يحتوي على 4 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية: 0، 1، 2، 4.

نحب قريصة رقمها x من الكيس A ثم قريصة رقمها y من الكيس B .

1/ احسب احتمال الحصول على رقمين متساويين ($x = y$)

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ثنائية (y, x) العدد x^y .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم بين أن: $P(X = 4) = \frac{5}{24}$ واحسب: $P(X \leq 4)$

ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم تحقق أن أمله الرياضي يساوي $\frac{209}{8}$

التمرين الثالث: (04 نقط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$.

أ) $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$ ، ب) المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$ ، ج) (u_n) متباعدة

2. في المستوي المركب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

أ- التحويل T الذي كتابته المركبة $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه O .

ب- مجموعة القطب $M(z)$ حيث $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$

3. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

أ- المستوي (P) الذي معادلته: $x + y - z + 1 = 0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2; 1; -1)$ و $\vec{u} = 1; -1; 1$ شعاع توجيه له لا يشتركان في أية نقطة.

ب- معادلة المستوي (Q) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (P) هي: $x - y + z = 0$.

التمرين الرابع: (08 نقط)

1- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$

و (C_f) المنحني المثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ ثم بين أن f دالة فردية.

1. أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أ. بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ثم استنتج جدول تغيرات f على $\mathbb{R}^+$

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$

4. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x \right) \right]$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

5. ارسم المستقيم (Δ) الذي معادلته له $y = -\frac{1}{2}x + 1$ والمنحني (C_f) .

6. أ. بين أن الدالة $x \mapsto \ln(e^{-x} + 1)$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto -\frac{1}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$.

ب. احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمتين التي معادلتها على الترتيب: $y = 0$ و $x = -1$ و $x = 0$.

Π - المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1}$

1. إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ بين أن $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

2. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3. بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

1. ليكن $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث :
- (1) بين أنه ، من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
 - (2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم استنتج جذرا آخر له .
 - (3) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.
 - II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ، القطر A ، B و C التي لاحقاً : $z_A = -1$ ، $z_B = 1+i$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب .

1) التحويل القطبي S يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي القطب $M'(z')$ حيث : $z' = (1+i)z + i$.
 أ - ما طبيعة التحويل S ؟ عين عناصره المميزة .

- ب - لتكن M نقطة تختلف عن A . ما طبيعة المثلث AMM' ؟
- 2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A ، لاحقاً العدد المركب z_n .
 نضع : $M_0 = O$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.
 أ - أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n = (1+i)^n - 1$.
 ب - عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون القطر O ، A و M_n في استقامة

التمرين الثاني: (04 نقط)

- في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء نعتبر القطر :
- $A(-1; 3; 2)$ ، $B(1; 4; 4)$ ، $C(0; 4; 2)$ ، $D(1; 0; 2)$ و $E(-9; -4; -1)$
- 1/ بين أن القطر A ، B و C تعين مستويًا (ABC) يطلب تعيين معادلته الديكارتية

2/ نعتبر المستقيم (Δ) المعروف بالتمثيل الوسيط : $(t \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t - 4 \\ z = 2t \end{cases}$$

- أ - تحقق أن القطر D و المستقيم (Δ) تعين مستويًا (P) يطلب تعيين تمثيل وسيطيا له
- ب - استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (P)
- ج - بين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان
- 3/ أ - تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (D) الذي يقبل الجملة التالية :

$$\begin{cases} x = -7 + 2\alpha \\ y = -8 + 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

تمثيل وسيطيا له .

- ب - تحقق من أن القطر E لا تنتمي إلى (P) ولا تنتمي للمستوي (ABC)
- ج - أوجد المسافة بين القطر E و المستقيم (D) بطريقتين مختلفتين .

التمرين الثالث: (05 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1; 2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{2-2x}{x-3}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة $2cm$

1- أ - ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[-1; 2]$.

ب - استنتج انه إذا كان $x \in [-1; 2]$ فإن $f(x) \in [-1; 2]$

2, 1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ - استعمل (C) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ لتمثيل الحدود $u_3 ; u_2 ; u_1 ; u_0$ للمتتالية (u_n) دون حسابا

ب - أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربا ؟

2, أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$.

ب - بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً . ماذا تستنتج ؟

3, نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، كما يلي : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$

أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية يعلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب - أكتب v_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (07 نقط)

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ حيث : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$ يحقق : $g(\alpha) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

نرمز بـ (C) للمنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $5cm$

1- أ) احسب نهاية $x.f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ ، ب) استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و فسر النتيجة بيانياً.

2- أ) أثبت أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}$ ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$

ب) بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = g(x)$

ج) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ أعط تفسيراً هندسياً للنتيجة .

د) بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ماذا تعني هذه النتيجة بالنسبة للدالة f ؟

3- شكل جدول تغيرات الدالة f

4- أرسم بعناية المنحني (C) الممثل للدالة f