

المدة: 03 ساعات و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين 01:

نعتبر متتالية الأعداد الحقيقية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب:

$$u_0 = -1 \text{ و } u_1 = \frac{1}{2} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

(1) احسب u_2 و استنتج أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية.

(2) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) ب: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

(أ) احسب v_0 . (ب) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n .

(ج) استنتج أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. (د) عبر عن v_n بدلالة n .

(3) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (w_n) ب: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

(أ) احسب w_0 . (ب) باستعمال المساواة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ، عبر عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n .

(ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_{n+1} = w_n + 2$. ثم عبر عن w_n بدلالة n .

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

(5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ،

. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

التمرين 02:

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I .

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

إعداد الأستاذ بالعبيدي محمد العربي

1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2) أ) بين أن : $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$ حيث f' مشتق الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب) عين إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.

3) أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(\ln x - 1)(2x - 1 - \ln x) = 0$.

ب) عين معدلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي ترتيها $-\frac{1}{2}$.

4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $3.3 < \alpha < 3.4$.

5) أ) احسب القيمة المضبوطة لـ $f(e^2)$ ثم قيمة مقربة لها.

ب) ارسم (Δ) و (C_f) .

6) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0; -\infty[$ ب : $h(x) = x \ln |x| - x + \frac{1}{2}(\ln |x|)^2$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) من أجل كل x من المجال $]0; -\infty[$ ، احسب $f(-x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_h) .

ب) ارسم (C_h) .

التمرين 03:

صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة و غير متمايزة عند اللمس . نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق و نسجل لونها ، ثم نعيدها الى الصندوق و نسحب منه كرة أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة .

1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

أ) "A" الحصول على كرتين بيضاوين .

ب) "B" الحصول على كرتين من نفس اللون .

2) نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرة بيضاء العلامة α ($\alpha \in \mathbb{R}$) ولكل كرة سوداء العلامة $(-\alpha)$

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين مجموع النقط المحصل عليها.

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب) عين قيمة العدد الحقيقي حتى تكون اللعبة مربحة .

3) نضيف $(n-3)$ كرة سوداء إلى الصندوق و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه .

- ما هو عدد الكرات السوداء التي تم إضافتها إلى الصندوق علم أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$

الموضوع الثاني

التمرين 01:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0, 2]$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, 2]$

استنتج أنه إذا كان $x \in [1, 2]$ فإن $f(x) \in [1, 2]$

2. نعرف المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ- أنقل الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور

الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 مبرزاً خطوط الرسم

ب- ما هو تخمينك حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n)

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n \leq 2$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) مقاربة ثم احسب نهايتها

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ و أوجد مرة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج- نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n : S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : n < S_n \leq n + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين 02:

f دالة معرفة على المجموعة $I =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) . ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أ- بين أن $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$. ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على I ثم شكل جدول تغيرات f .

ب- عين معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في نقطة ذات الفاصلة 2

3) g دالة معرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

إعداد الأستاذ بالعبيدي محمد العربي

- أ) بين أنه من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ ، $\frac{x+1}{x} > 1$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$.
- ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. ماذا تستنتج؟
- ج) نسمي (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$. حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (C) على $]1; +\infty[$.
- د) ارسم (C) و (Δ) ثم المنحنى (C_f) .

4) حل بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m المعادلة التالية: $(x-1)\ln\left(\frac{x+1}{m}\right) = -1$

التمرين 03:

- صندوق A يحتوي على 4 كريات حمراء و 6 كريات سوداء و صندوق B يحتوي على كرية واحدة حمراء و 9 كريات سوداء مع أن كل الكريات متساوية الاحتمال .
- I) يرمي لاعب زهرة نرد غير مزيفة و مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة في الهواء .
- إذا تحصل على الرقم 1 يسحب كرة واحدة من الصندوق A .
- إذا لم يتحصل على الرقم 1 فيسحب كرة واحدة من الصندوق B .
- 1) شكل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة .
- 2) نسمي R الحادثة : "الحصول على كرية حمراء" بين أن $P(R) = 0,15$
- 3) تحصل اللاعب على كرية حمراء ، بين أن احتمال أن تكون من الصندوق B أكبر أو تساوي من احتمال أن تكون من الصندوق A
- II) اللاعب يكرر هذه اللعبة مرتان (اللعبة المنصوص عليها في الجزء في نفس الشروط المتماثلة و المستقلة عن بعضها بمعنى يعيد الصندوقين إلى تعدادها الأول بعد اللعبة الأولى)
- ليكن x عدد طبيعي غير معدوم ، بعد اللعبتين يتحصل اللاعب على نقطة عن كل كرية حمراء و يخسر نقطة عن كل كرية سوداء .
- نرمز بـ G إلى قيمة الربح أو الخسارة بعد اللعبتين .
- 1) بين أن G يأخذ القيم $2x$ ، $x-2$ ، -4 .
- 2) أوجد قانون الاحتمال و أحسب الأمل الرياضي $E(G)$ للمتغير العشوائي G بدلالة x .
- 3) ماهي أصغر قيمة لـ x حتى تكون اللعبة مربحة .