

إختبار الشلاشي الثاني في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

المستوى: الشاتة علوم تجبرية

التمرين الأول : (06,5 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.
 (1) أدرس تغيرات الدالة f على $[0;1]$.

(ب) إستنتج أنه إذا كان $x \in [0;1]$ فإن $f(x) \in [0;1]$.

(ج) مثل بيانيا الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$. (الوحدة $10cm$) .

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(أ) باستعمال المنحني (C) للدالة f عيّن على محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 .

✓ أعط تخمينا حول إتجاه و تقارب المتتالية (u_n) .

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$.

(ج) بين أن : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(د) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

(أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم عبارة u_n بدلالة n .

(ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثاني : (06 نقاط)

يلعب طفل بـ 20 كرية، منها 13 كرية حمراء و 7 كريات خضراء . يضع 10 كريات حمراء و 3 كريات خضراء في العلبة A ، و يضع الباقي في العلبة B .

(1) في أول لعبة يختار 3 كريات عشوائيا و في آن واحد من العلبة A و ينظر كم كرية حمراء ظهرت .
 ليكن X المتغير العشوائي المتعلق بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

✓ عيّن قانون إحتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(2) و في ثاني لعبة ، يختار الطفل إحدى اللعب و يسحب منها كرة واحدة .

(أ) مثل هذه الوضعية بشجرة الإحتمالات .

- (ب) أحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .
 (ج) علما أن الطفل سحب كرة حمراء ، ما احتمال أن تكون من العلبة A ؟

التمرين الخامس : (07,5 نقاط)

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$.

- (1) أحسب نهايات الدالة g عند 0 و $+\infty$.
- (2) أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها .
- (3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $1,4 < \alpha < 1,5$.
 ✓ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني : f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x-2)\ln x$.

(C_f) منحنىها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) أحسب نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$ ، ثم فسّر النهاية عند 0 هندسياً .
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ، ثم أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \approx 1,45$.
- (4) (T_{x_0}) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 :

(أ) أكتب المعادلة الديكارتيّة للمماس (T_{x_0}) .

(ب) عيّن x_0 إذا علمت أن المماس (T_{x_0}) يمر بالنقطة $A(2;0)$.

(ج) إستنتج أن (C_f) يقبل مماسين يمرّان بالنقطة A ، ثم أكتب معادلة كل منهما .

(5) أرسم كلاً من المماسين والمنحنى (C_f) .

الجزء الثالث : نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = mx - 2m$ ، حيث m وسيط حقيقي .

(أ) تحقق أن (d_m) يمر بالنقطة A .

(ب) ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - 2m$.

بالتوفيق في بكالوريا 2018 ————— أستاذة المادة

تصحيح الاختبار للفصل الثاني شعبة العلوم تجريبية

التمرين الأول :

لدينا الدالة f المعرفة على $[0;1]$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.

(1) أ) دراسة تغيّرات الدالة f على $[0;1]$:

لدينا من أجل كل x من $[0;1]$: $f'(x) = \frac{10}{(x+4)^2}$ ، أي : $f'(x) > 0$.

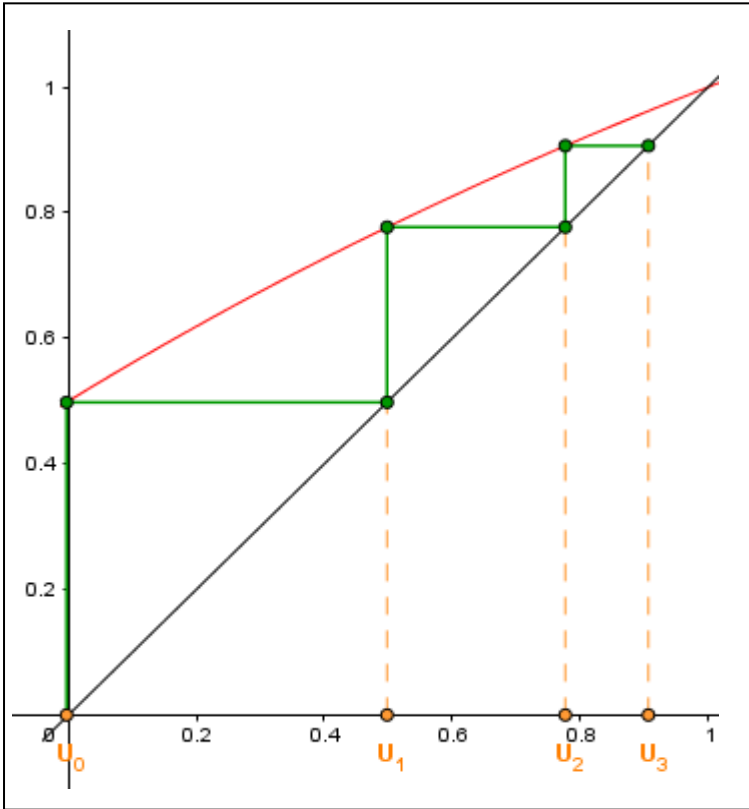
ومنه الدالة f متزايدة على المجال $[0;1]$.

ب) لدينا $x \in [0;1]$ أي : $0 \leq x \leq 1$ ، بما أن الدالة f متزايدة على $[0;1]$ فإن : $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ ، أي :

$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ ، لكن : $0 \leq \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ ، ومنه : $0 \leq f(x) \leq 1$ ، أي : $f(x) \in [0;1]$.

إذن : إذا كان $x \in [0;1]$ فإن $f(x) \in [0;1]$.

ج) التمثيل البياني :
أنظر الشكل المقابل .



(2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 :
أنظر الشكل المقابل .

التخمين : نلاحظ أن المتتالية (u_n) متزايدة
و تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحني
(C) و المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

ب) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$: (نستعمل البرهان بالتراجع)

✓ التحقق من أجل $n = 0$ ، $(u_0 = 0)$ ، أي : $0 \leq u_0 \leq 1$ ، ومنه : $0 \leq u_0 \leq 1$ (محققة) .

✓ نفرض صحة الخاصية من أجل n ، أي : $0 \leq u_n \leq 1$.

✓ نثبت صحة الخاصية من أجل $n+1$ ، أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

لدينا فرضاً : $0 \leq u_n \leq 1$ ، و حسب السؤال الأول (ب) نستنتج أن : $0 \leq f(u_n) \leq 1$ أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

الخاصية محققة من أجل $n+1$ يستلزم أنها صحيحة من أجل n ، ومنه من أجل كل عدد طبيعي n :
 $0 \leq u_n \leq 1$ وهو المطلوب .

(ج) بيان أن : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

أي : $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}$ أي : $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n$

ومنه : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ وهو المطلوب .

✓ لدينا : $0 \leq u_n \leq 1$ ، ومنه : $1-u_n \geq 0$ ، وأيضا : $u_n+2 > 0$ و $u_n+4 > 0$.

إذن : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

(د) نعم المتتالية (u_n) متقاربة .

✓ بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 1 ($0 \leq u_n \leq 1$) إذن فهي متقاربة .

(3) لدينا : (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.

(أ) برهان أن المتتالية (v_n) هندسية :

نحسب v_{n+1} : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2} = \frac{\frac{3u_n+2-u_n-4}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4}} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10}$

أي : $v_{n+1} = \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)}$ أي : $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$ ، إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و $v_0 = -\frac{1}{2}$.

(ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ، ثم عبارة u_n بدلالة n :

✓ عبارة v_n : $v_n = v_0 \times q^n$ ، أي : $v_n = -\frac{1}{2}(\frac{2}{5})^n$

✓ عبارة u_n : لدينا $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ ، أي : $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$ ، أي : $v_n u_n - u_n = -2v_n - 1$ ،

ومنه : $(v_n-1)u_n = -2v_n - 1$ ، أي : $u_n = \frac{-2v_n-1}{v_n-1}$ ، أي : $u_n = \frac{-2 \times (-\frac{1}{2})(\frac{2}{5})^n - 1}{(-\frac{1}{2})(\frac{2}{5})^n - 1}$

إذن : $u_n = \frac{(\frac{2}{5})^n - 1}{(-\frac{1}{2})(\frac{2}{5})^n - 1}$

(ج) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{2}{5})^n = 0$ ، ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1$

التمرين الثاني:

(1) اللعبة الأولى:

أولاً نعين قيم المتغير العشوائي X : بما أنه يرفق بعدد الكرات الحمراء المسحوبة فتكون قيمه كالتالي :
 $\mathbb{X} \in \{0; 1; 2; 3\}$.

✓ تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

عدد الحالات الممكنة للسحب من العلبة A هي : $286 = \frac{13!}{3!(13-3)!} = C_{13}^3$.

X_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{286}$	$\frac{30}{286}$	$\frac{135}{286}$	$\frac{120}{286}$

$$p(X=0) = \frac{C_3^3}{286} = \frac{1}{286} \quad (1)$$

$$p(X=1) = \frac{C_{10}^1 \times C_3^2}{286} = \frac{10 \times 3}{286} = \frac{30}{286} \quad (2)$$

$$p(X=2) = \frac{C_{10}^2 \times C_3^1}{286} = \frac{45 \times 3}{286} = \frac{135}{286} \quad (3)$$

$$p(X=3) = \frac{C_{10}^3}{286} = \frac{120}{286} \quad (4)$$

✓ حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = \frac{0(1) + 1(30) + 2(135) + 3(120)}{286} = \frac{30 + 270 + 360}{286} = \frac{660}{286} \approx 2,3$$

(2) اللعبة الثانية:

(أ) تمثيل الوضعية بشجرة الاحتمالات :
 أنظر الشكل المقابل.

(ب) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء هو :

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R)$$

$$p(R) = (p(A) \times p_A(R)) + (p(B) \times p_B(R))$$

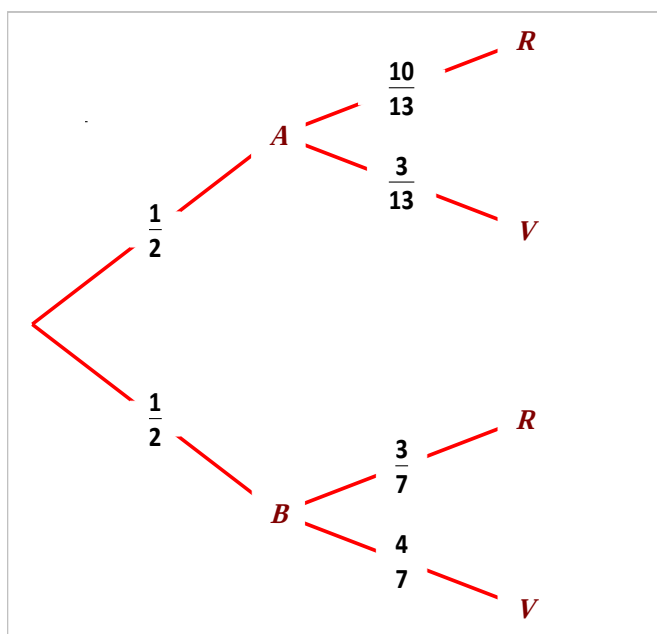
$$p(R) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{10}{13}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}\right) \quad \text{أي :}$$

$$p(R) = \left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{3}{14}\right) = \frac{70 + 39}{182} = \frac{109}{182}$$

(ج) حساب الاحتمال الشرطي : $p_R(A)$

$$p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{109}{182}} = \frac{5}{13} \times \frac{182}{109}$$

$$p_R(A) = \frac{70}{109} \quad \text{ومنه :}$$



التمرين الثالث :

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$.
(1) حساب النهايات :

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x} = -\infty \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{لأن : } -2 \\ 0^+ \end{array} \right. \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \quad \checkmark$$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{لأن : } \\ \end{array} \right. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \checkmark$$

(2) دراسة تغيّرات الدالة g و تشكيل جدول تغيّراتها :
الدالة المشتقة :

جدول التغيّرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ،

ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$.

نلاحظ أن : $g'(x) > 0$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$.
إذن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

(3) بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $1,4 < \alpha < 1,5$:
الدالة g مستمرة ورتيبة على $]0; +\infty[$ ، إذن هي مستمرة ورتيبة على المجال $[1,4; 1,5]$.

وبما أن : $\begin{cases} g(1,4) = -0,09 \\ g(1,5) = 0,07 \end{cases}$ أي : $g(1,4) \times g(1,5) < 0$ ، إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α

حيث : $1,4 < \alpha < 1,5$.

✓ إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0; +\infty[$: نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

من أجل $x \geq \alpha$ يكون $g(x) \geq g(\alpha)$ ، أي : $g(x) \geq 0$.
من أجل $0 < x < \alpha$ يكون $g(x) < g(\alpha)$ ، أي : $g(x) < 0$.

الجزء الثاني : f دالة معرفّة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x - 2) \ln x$.

(1) حساب النهايات :

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \quad \text{لأنّ ، } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + (x - 2) \ln x] = +\infty \quad \checkmark$$

التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته $x = 0$.

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأنّ ، } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + (x - 2) \ln x] = +\infty \quad \checkmark$$

(2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f وتشكيل جدول تغيّراتها :

✓ **الدالة المشتقة : الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ودالتها المشتقة هي :**

$$\cdot f'(x) = g(x) : \text{ومنه ، } f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} \text{ ، أي : } f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x-2)$$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

✓ **جدول التغيّرات :**

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$\circ$	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) بيّن أنّ : $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$ ، ثمّ أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \approx 1,45$.

$$\cdot \ln \alpha = -\frac{\alpha - 2}{\alpha} \text{ ، ومنه : } \ln \alpha + \frac{\alpha - 2}{\alpha} = 0 \text{ ، أي : } g(\alpha) = 0$$

نحسب الآن $f(\alpha)$: $f(\alpha) = 1 + (\alpha - 2) \ln \alpha$ ، أي : $f(\alpha) = 1 + (\alpha - 2)(-\frac{\alpha - 2}{\alpha})$ ، ومنه :

$$f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} \text{ ، وهو المطلوب .}$$

✓ من أجل $\alpha \approx 1,45$ ، يكون : $f(\alpha) \approx 0,8$.

(4) (T_{x_0}) هو المماس للمنحني (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 :

$$\cdot \text{أ) كتابة معادلة المماس } (T_{x_0}) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ب) بما أنّ (T_{x_0}) يشمل النقطة $A(2; 0)$ فيكون لدينا : (إحداثياتها يحققان معادلة المماس (T_{x_0}) .)

$$\cdot \text{أي : } 0 = f'(x_0)(2 - x_0) + f(x_0) \text{ ، أي : } 0 = \left[\ln x_0 + \frac{x_0 - 2}{x_0} \right] (2 - x_0) + 1 + (x_0 - 2) \ln x_0 \text{ ، ومنه :}$$

$$: \text{ومنه} , (x_0 - 2) \left[-\frac{x_0 - 2}{x_0} \right] = -1 : \text{أي} , 0 = (x_0 - 2) \left[\ln x_0 - \left(\ln x_0 + \frac{x_0 - 2}{x_0} \right) \right] + 1$$

$$, x_0^2 - 4x_0 + 4 - x_0 = 0 : \text{أي} , (x_0 - 2)^2 = x_0 : \text{أي} , -(x_0 - 2)^2 = -x_0 : \text{أي} , -\frac{(x_0 - 2)^2}{x_0} = -1$$

$$. \text{ومنه} : x_0^2 - 5x_0 + 4 = 0 , \text{معناه أن} : x_0 = 1 , \text{أو} , x_0 = 4 .$$

ج) إذن المنحني (C_f) يقبل مماسين يمران بالنقطة A :

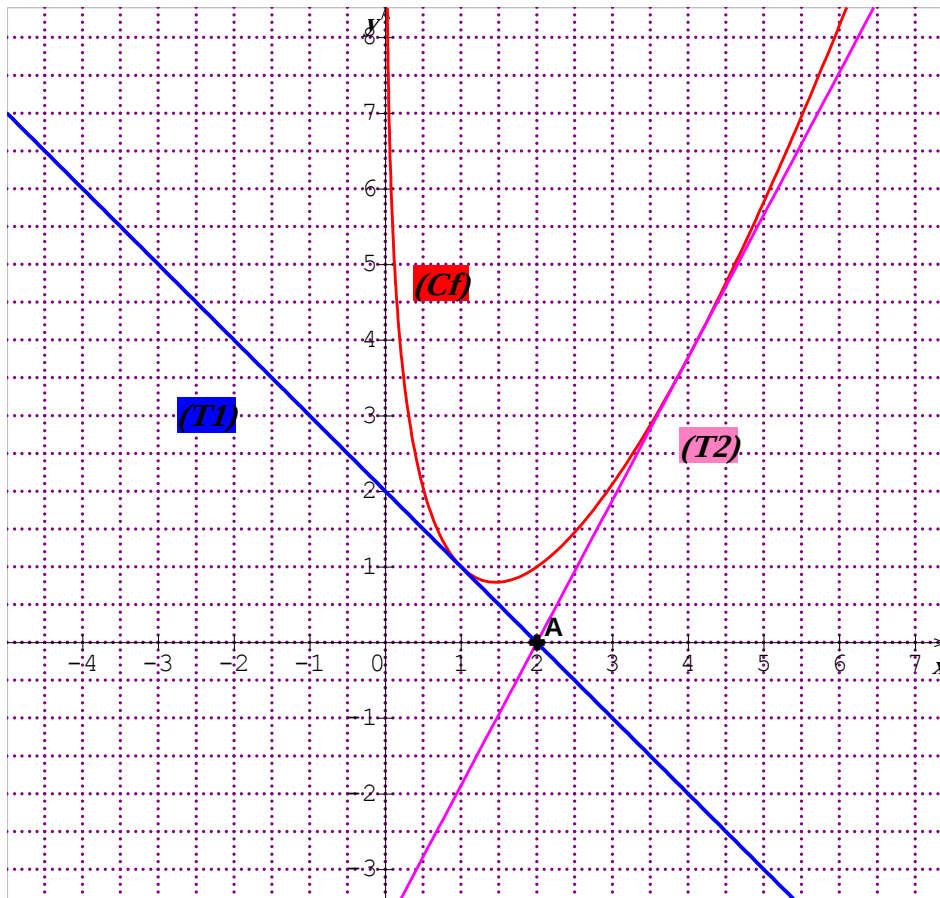
✓ المماس الأول يمس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

✓ المماس الثاني يمس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 4 .

$$(1) \text{ معادلة المماس الأول} : (T_1) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) , \text{ومنه} : y = -x + 2 : (T_1) .$$

$$(2) \text{ معادلة المماس الثاني} : y = f'(4)(x - 4) + f(4) , \text{ومنه} : y = \left(\ln 4 + \frac{1}{2} \right)x - 2\ln(4) - 1 : (T_2) .$$

(5) رسم المماسين والمنحني (C_f) :



الجزء الثالث : $(d_m) : y = mx - 2m$.

أ) التحقق أن (d_m) يمر بالنقطة A أي : نعوض إحداثيي النقطة A في معادلة المستقيم (d_m) :

$$. \text{إذن} : 0 = m(2) - 2m , \text{يشمل النقطة} A .$$

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x) = mx - 2m$:

عدد حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (d_m) .

المستقيم (d_m) يتحرك حركة دورانية حول النقطة الثابتة A .

نعلم أنّ المماسين (T_1) و (T_2) يمرّان أيضا بالنقطة A .

$$\text{لدينا : } \left\{ \begin{array}{l} (d_m) : y = mx - 2m \\ (T_1) : y = -x + 2 \\ (T_2) : y = (\ln 4 + \frac{1}{2})x - 2\ln(4) - 1 \end{array} \right. . \text{ ندرس ثلاث حالات :}$$

✓ ١ : $m < 0$ ، هناك ثلاث حالات :

(1) $m < -1$ معناه أنّ (d_m) يقع فوق (T_1) ، ومنه المعادلة تقبل حلين متميزين .

(2) $m = -1$ معناه أنّ (d_m) هو نفسه (T_1) ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو 1 .

(3) $-1 < m < 0$ معناه أنّ (d_m) يقع تحت (T_1) ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ ٢ : $m = 0$ معناه أنّ $(d_m) : y = 0$ ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ ٣ : $m > 0$ ، هناك ثلاث حالات :

(1) $0 < m < \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ (d_m) يقع تحت (T_2) ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

(2) $m = \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ (d_m) هو نفسه (T_2) ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو 4 .

(3) $m > \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ (d_m) يقع فوق (T_2) ، ومنه المعادلة تقبل حلين متميزين .

تمنياتنا للجميع بالنجاح الباهر في بكالوريا 2018 إن شاء الله

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق