

يوم : 04 / 12 / 2017

الثانويات : عيسى زريمش (حمام دباغ) - هوارى بومدين

المدة : ساعتان و نصف

غجاتي علاوة (الركنية) - حدادي عبد الله (هيليوبوليس)

المستوى : 3 تر

شعلال مسعود (قالمه)

اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (05 نقط) :

لكل سؤال ثلاث إجابات ، إجابة واحدة منها صحيحة ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير

الرقم	السؤال	الإجابة أ	الإجابة ب	الإجابة ج
01	(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = e^3$ و $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و $v_n = \ln(u_n) - 2$ المتتالية (v_n) :	هندسية	حسابية	لا حسابية ولا هندسية
02	الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = x^2 - 2x - \ln(x-1)^2$ تقبل محور تناظر معادلته :	$x=1$	$x=-1$	$x=2$
03	إذا كانت عبارة مشتقة دالة f على $\mathbb{R}$ هي : $f'(x) = \frac{1}{x^2+3}$ وكان : $h(x) = f(3x)$ فإن :	$h'(x) = \frac{1}{x^2+3}$	$h'(x) = \frac{1}{3x^2+3}$	$h'(x) = \frac{1}{3x^2+1}$
04	f حلا في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية : $y' + 6y - 2 = 0$ و (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس ، المنحنى (C) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته :	$y = -\frac{1}{3}$	$y = \frac{1}{3}$	$y = -\frac{1}{2}$

التمرين الثاني (06 نقاط) :

f دالة معرفة على $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$ بـ : $f(x) = x + 1 + e^{\frac{1}{x+1}}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل (الوثيقة المرفقة) .

1 / بقراءة بيانية : شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2 / دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = -x + 1 + e^{\frac{1}{x+1}}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) برهن أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

ج) أدرس اتجاه تغير الدالة g و أنشئ جدول تغيراتها .

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $k(x) = -|x| + 1 + e^{\frac{1}{x+1}}$

(C_k) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1 / أ) أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة .

2 / أكتب معادلتين نصف المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للمنحنى (C_k) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

3 / أرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) . (الإنشاء على الوثيقة المرفقة تعاد مع ورقة الإجابة)

التمرين الثالث (09 نقاط):

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2 \ln x$.

1 / ادرس تغيرات الدالة g .

2 / بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β حيث : $0.75 < \beta < 0.76$. ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 - x + \frac{2}{x}(1 + \ln x)$.

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) .

1 / أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) * بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

2 / أ) * أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

ب) * استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3 / أ) * بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) ، يطلب كتابة معادلة له .

ب) * ارسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) .

4 / m عدد حقيقي ، عين قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $0 = -mx + 2 + 2 \ln x$... (E) حلين مختلفين موجبين .

(III) α عدد حقيقي موجب تماماً . نعتبر الدالة f_α المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f_\alpha(x) = 1 - x + \frac{\alpha}{x}(1 + \ln x)$.

نسمي (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) .

1 / أثبت أن جميع المنحنيات (C_α) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها .

2 / نعتبر النقط $A\left(-2; \frac{4}{\alpha}\right)$ ، $B\left(1; \frac{2 \ln \alpha}{\alpha}\right)$ و $C(-2\alpha; 2\alpha - 2)$ ولتكن G_α مرجح الجملة المثقلة : $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$.

* عين بدلالة α إحداثيي النقطة G_α .

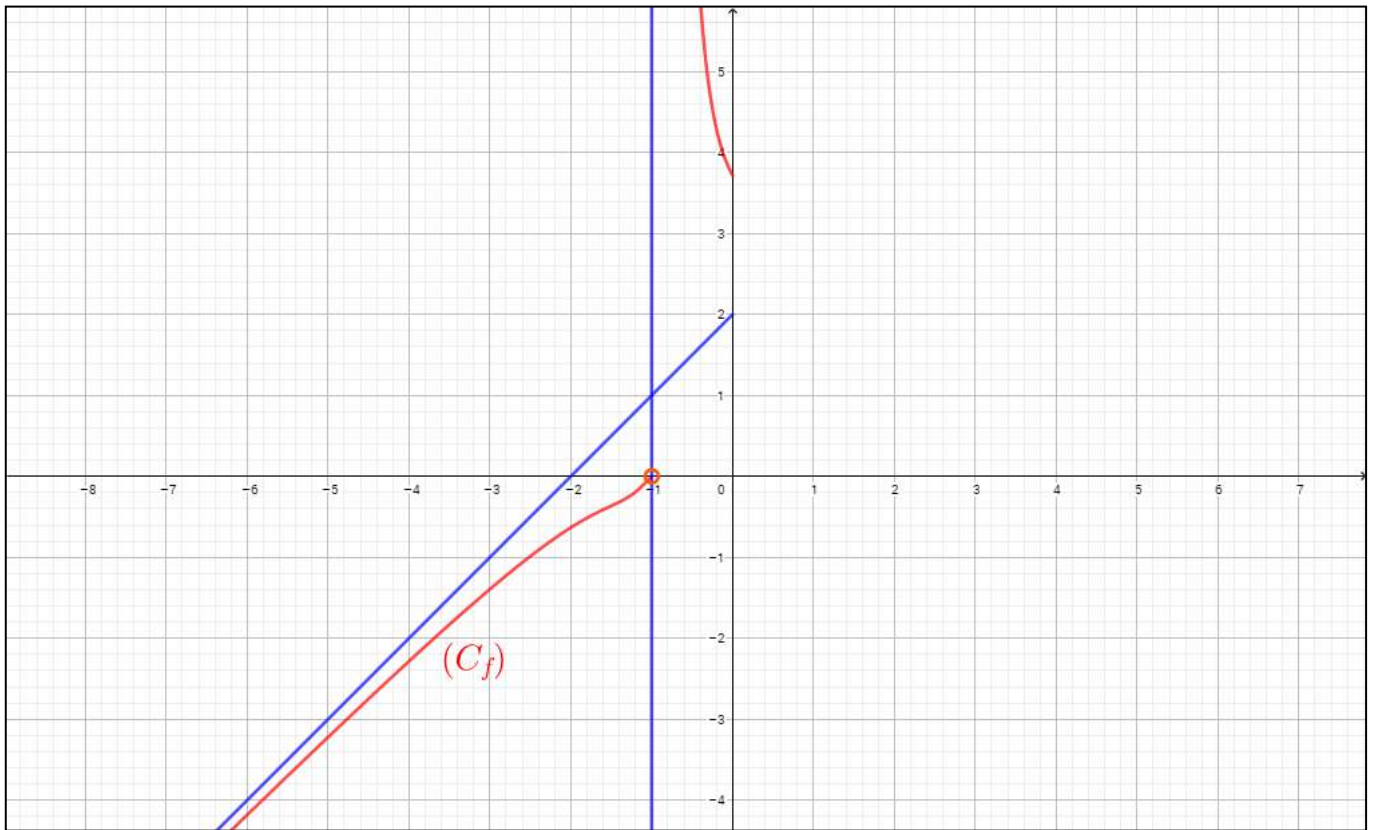
* استنتج مجموعة النقط G_α عندما يسمح العدد α المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

بالتوفيق

الوثيقة المرفقة:

الإسم و اللقب :

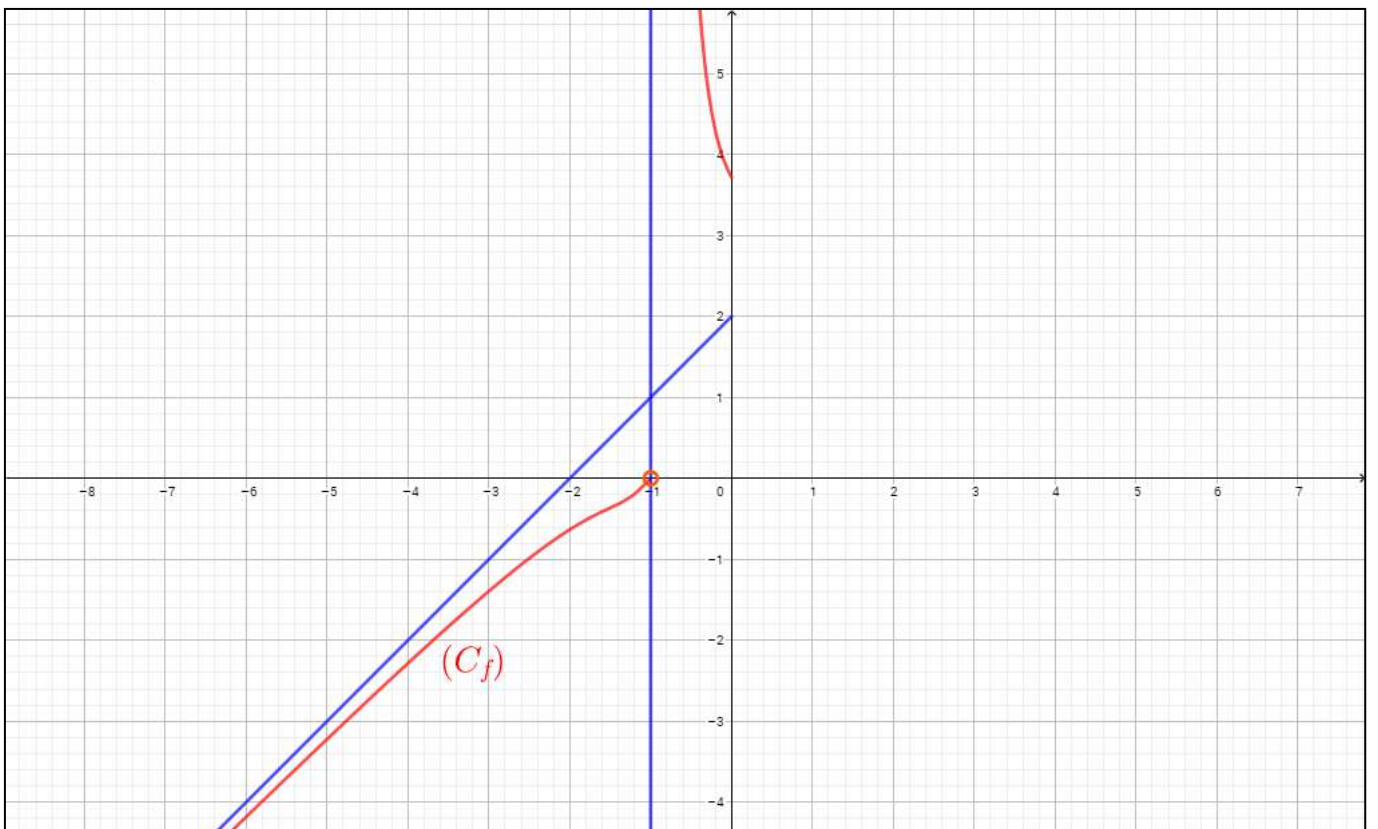
القسم :



الوثيقة المرفقة:

الإسم و اللقب :

القسم :



التمرين الأول:

سؤال 1	سؤال 2	سؤال 3	سؤال 4
أ	أ	ج	ب

التبرير:

(1) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$$

$$= \ln e + \ln \sqrt{u_n} - 2 = -1 + \frac{1}{2} \ln u_n = \frac{1}{2} (\ln u_n - 2) = \frac{1}{2} v_n$$

(2) من أجل كل عدد حقيقى x حيث $(1+x) \in \mathbb{R} - \{1\}$ فإن:
 $(1-x) \in \mathbb{R} - \{1\}$

نبين أن: $f(1+x) = f(1-x)$

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) - \ln(1-x-1)^2$$

$$= 1 - 2x + x^2 - 2 + 2x - \ln x^2 = x^2 - 1 - \ln x^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$f(1+x) = (1+x)^2 - 2(1+x) - \ln(1+x-1)^2$$

$$= 1 + 2x + x^2 - 2 - 2x - \ln x^2 = x^2 - 1 - \ln x^2 \dots\dots\dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو محور تناظر لـ (C_f)

(3) لدينا من أجل كل عدد حقيقى x :

$$h'(x) = [f(3x)]' = 3f'(3x)$$

$$= 3 \left(\frac{1}{(3x)^2 + 3} \right) = \frac{3}{9x^2 + 3} = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

(4) لدينا: $y' + 6y - 2 = 0$ تكافئ: $y' = -6y + 2$
 حلول المعادلة التفاضلية: $y' = -6y + 2$ فى $\mathbb{R}$ هي الدوال y
 حيث: $y = ce^{-6x} + \frac{1}{3}$ مع c ثابت حقيقى.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ce^{-6x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

التمرين الثانى:

$$I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0], f(x) = x + 1 + e^{\frac{1}{x+1}} \quad (I)$$

1 / تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$D_g = [0; +\infty[, g(x) = -x + 1 + e^{\frac{1}{x+1}} / 2$$

(أ) حساب نهاية g عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + 1 + e^{\frac{1}{x+1}} \right) = -\infty$$

(ب) إثبات أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و
 تعيين معادلة له:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x} \right) = -1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + e^{\frac{1}{x+1}} \right) = 2 \quad \text{و}$$

مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ معادلته $y = -x + 2$.

(ج) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

g تقبل الاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ و دالتها المشتقة g'

$$g'(x) = - \left(1 + \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} \right) \quad \text{حيث}$$

إن من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $g'(x) < 0$ ومنه الدالة g
 متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$

جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$
$g(x)$	$1+e$	$-\infty$

$$D_k = \mathbb{R} - \{-1\}, k(x) = -|x| + 1 + e^{\frac{1}{x+1}} \quad (II)$$

$$1 / \text{أ) حساب } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + 1 + e^{\frac{1}{h+1}} - 1 - e}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{e^{\frac{1}{h+1}} - 1}{h+1} \times \frac{-e}{h+1} \right) = -1 - e$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

*جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 / تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث

$0.75 < \beta < 0.76$ * : g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0; +\infty[$

فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.75; 0.76[$ و

$g(0.75) \approx -0.013$ و $g(0.76) \approx 0.029$ إذن

$g(0.75) \times g(0.76) < 0$ ومنه و حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث

$0.75 < \beta < 0.76$

x	0	β	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

3 / إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$:

$D_f =]0; +\infty[$ ، $f(x) = 1 - x + \frac{2}{x}(1 + \ln x)$ (II)

1 / حساب نهايتي f عند 0 و $+\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

ب* نبين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته

$y = -x + 1$ عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x}(1 + \ln x) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right] = 0$$

* دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا $[f(x) - (-x + 1)] = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$ و منه إشارة الفرق

هي من إشارة $(1 + \ln x)$ وهي :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$1 + \ln x$	-	0	+

إذن (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $[\frac{1}{e}; +\infty[$ وتحت (Δ)

على المجال $]0; \frac{1}{e}[$ و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات

الإحداثيات $\left(\frac{1}{e}; \frac{-1+e}{e} \right)$.

2 / أ* اثبات أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f و دالتها المشتقة f' حيث :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \left[\frac{-2}{x^2}(1 + \ln x) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} \right] \\ &= -1 - \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = -\frac{(x^2 + 2 \ln x)}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 1 + e^{\frac{1}{h+1}} - 1 - e}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{e^{\frac{-h}{h+1}} - 1}{-h} \times \frac{-e}{h+1} \right) = 1 - e \end{aligned}$$

الاستنتاج :

لدينا : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ إذن الدالة k لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

ب (التفسير الهندسي :

بما أن الدالة k قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين ومن اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفين مماسين عند النقطة التي فاصلتها 0 ومنه النقطة $A(0; e+1)$ هي نقطة زاوية .

2 / كتابة معادلتى نصفى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للمنحنى

(C_k) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$:

$(\Delta_1): y = (1 - e)x + e + 1$ ؛ $x \leq 0$

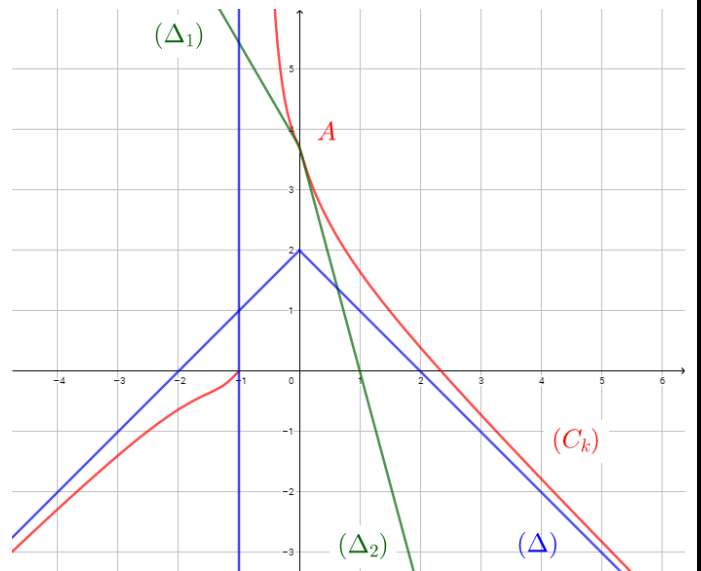
$(\Delta_2): y = (-1 - e)x + e + 1$ ؛ $x \geq 0$

3 / رسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) :

لدينا $\begin{cases} k(x) = f(x) & ; x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\\ k(x) = g(x) & ; x \in [0; +\infty[\end{cases}$

ومنه (C_k) ينطبق على (C_f) على المجالين $]-1; 0[$ ،

$]-1; 0[$ و (C_k) ينطبق على (C_g) على المجال $[0; +\infty[$.



التمرين الثالث:

g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2 \ln x$

1 / دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ *

* g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و : $g'(x) = 2x + \frac{2}{x} > 0$

(III) α عدد حقيقي موجب تماما. نعتبر الدالة f_α المعرفة

$$f_\alpha(x) = 1 - x + \frac{\alpha}{x}(1 + \ln x) \quad \text{على المجال }]0; +\infty[$$

1/ إثبات أن جميع المنحنيات (C_α) تشمل نقطة ثابتة :

$$y = 1 - x + \frac{\alpha}{x}(1 + \ln x) \quad \text{معناه} \quad y = f_\alpha(x)$$

$$(y - 1 + x) - \alpha \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right) = 0 \quad \text{معناه}$$

تكون العبارة محققة من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما α إذا

$$\text{كان : } y - 1 + x = 0 \quad \text{و} \quad -\frac{\ln x + 1}{x} = 0$$

$$\text{وهذا معناه} \quad x = \frac{1}{e} \quad \text{و} \quad y = \frac{e-1}{e}$$

ومنه جميع المنحنيات (C_α) تشمل نقطة ثابتة هي النقطة

$$\Omega\left(\frac{1}{e}; \frac{e-1}{e}\right)$$

2/ لدينا $A\left(-2; \frac{4}{\alpha}\right)$ ، $B\left(1; \frac{2 \ln \alpha}{\alpha}\right)$ و $C(-2\alpha; 2\alpha - 2)$

و G_α مرجح الجملة المثقلة : $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$.

* تعيين بدلالة α إحداثي النقطة G_α :

$$\text{ومنه} \quad \begin{cases} x_G = \frac{1(-2) + 2(1) + (-1)(-2\alpha)}{2} \\ y_G = \frac{1\left(\frac{4}{\alpha}\right) + 2\left(\frac{2 \ln \alpha}{\alpha}\right) + (-1)(2\alpha - 2)}{2} \end{cases}$$

$$\text{ومنه} \quad \begin{cases} x_G = \alpha \\ y_G = 1 - \alpha + \frac{2}{\alpha}(1 + \ln \alpha) \end{cases}$$

$$G_\alpha\left(\alpha; 1 - \alpha + \frac{2}{\alpha}(1 + \ln \alpha)\right)$$

ب* استنتاج مجموعة النقط G_α عندما يسمح العدد α

المجموعة $\mathbb{R}_+^*$:

لدينا إحداثيات G_α :

$$\begin{cases} x_G = \alpha \\ y_G = f(\alpha) \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{cases} x_G = \alpha \\ y_G = 1 - \alpha + \frac{2}{\alpha}(1 + \ln \alpha) \end{cases}$$

ومنه : $y_G = f(x_G)$ وهذا يعني أن مجموعة النقط G_α عندما

يسمح العدد α المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ هي جميع نقط المنحنى (C_f)

ب / استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل x من D_f لدينا : إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة

$g(x)$ وهي :

x	0	$\beta + \infty$
$f'(x)$	+	-

* جدول تغيرات الدالة f :

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\beta)$	$-\infty$

3 / أ * نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ) :

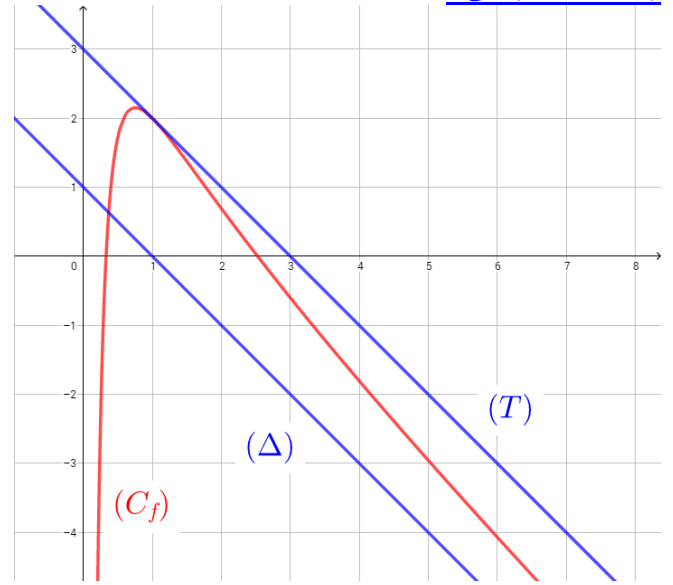
$$\text{نحل المعادلة} \quad f'(x) = -1 \quad \text{معناه} \quad \frac{-g(x)}{x^2} = -1$$

معناه : $x^2 + 2 \ln x = x^2$ ومنه : $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$.

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) عند النقطة

ذات الفاصلة $x = 1$ معادلته : $y = -x + 3$

ب* التمثيل البياني :



4/ تعيين قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة

$(E) : -mx + 2 + 2 \ln x = 0$ حلين مختلفين موجبين :

$$-mx + 2 + 2 \ln x = 0 \quad \text{يكافئ} \quad m = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$$

أي أن $m = f(x) - 1 + x$ معناه $f(x) = -x + m + 1$

حل هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة : $y = -x + m + 1$ الموازية لـ (T) و

(Δ) ومنه نجد :

المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين موجبين تماما : من أجل

$$m + 1 \in]1; 3[\quad \text{أي} \quad m \in]0; 2[$$