

الاختبار الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times (0.5)^n \quad n \text{ طبيعي}$$

(1) أ) أنقل على ورقة اجابتك ثم اتمم الجدول التالي، تدور النتائج الى 10^{-2} .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n									

(ب) من خلال الجدول السابق ، ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) أ) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$.

(ب) استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(ج) استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية كما يلي :

$$v_n = u_n - 10 \times (0.5)^n$$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right)$ و (Cf) التمثيل البياني للدالة f في المستوي

المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \left(\frac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1} \right)$.

(ب) ادرس اشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم انجز جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (Cf) بجوار $+\infty$

(ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = -x - 2\ln 2 + \ln(4e^{2x} + 1)$.

(ج) استنتج ان المنحنى (Cf) يقبل مستقيماً مقارباً اخر (Δ') بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

(4) عين نقط تقاطع المنحنى (Cf) مع محور الترتيب ثم ارسم المنحنى (Cf)

(5) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x حيث : $f(x) = m - 2 \dots (1)$ و m وسيط حقيقي .

ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (1)

تصحيح الاختبار الأول لقسم 3 تقني رياضي 2018/2017

التمرين الأول : (09 نقط)

(1 أ) اتمام الجدول التالي، تدور النتائج الى 10^{-2} (01ن)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3.14	2.18	1.19	0.61	0.31	0.16	0.08	0.04

(ب) يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من الحد الثاني (0.5ن)

(2 أ) برهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$ (01.5ن)

- نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n=1$: $u_1 = 3.4$ و $3.4 \geq \frac{15}{8}$. ($\frac{15}{8} \approx 1.875$)

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n=1$.

- نفرض صحة الخاصية من أجل n حيث $n \geq 1$ أي $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$ ونبرهن على صحة الخاصية

من أجل $(n+1)$ أي : $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^{n+1}$.

لدينا : $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$ اذن $\frac{1}{5}u_n \geq \frac{3}{4} \times (0.5)^n$ وبالتالي

$\frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$ يعني $\frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n \geq \frac{3}{4} \times (0.5)^n + 3(0.5)^n$

. $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$

نعلم انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $(0.5)^n > (0.5)^{n+1}$.

وبالتالي : $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^{n+1}$. اذن الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$.

وعليه : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$.

(ب) استنتاج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (01.5ن)

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - u_n = -\frac{4}{5}u_n + 3(0.5)^n = \frac{4}{5} \left(-u_n + \frac{15}{4} \times (0.5)^n \right)$$

من الاجابة (2 أ) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n$.

اذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

اذن المتتالية (u_n) متتالية متناقصة .

(ج) استنتاج أن (u_n) متتالية متقاربة (0.5ن)

بما أن المتتالية متناقصة (الاجابة 1 ب) (ومحدودة من الاسفل ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n \geq \frac{15}{4} \times (0.5)^n > 0$) (الاجابة 1 أ)) فهي متقاربة .

(3 أ) نبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول(01ن)
من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times (0.5)^{n+1} \\ v_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - 10(0.5)^n \times (0.5) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + 3(0.5)^n - 5(0.5)^n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n - 2(0.5)^n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{5}(u_n - 10(0.5)^n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{5}v_n \end{aligned}$$

اذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الاول v_0 حيث
.....(0.5ن) $v_0 = u_0 - 10(0.5)^0 = 2 - 10 = -8$

(ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 q^n = -8 \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad \text{حيث } n \text{ عدد طبيعي(0.5ن)}$$

لدينا : $v_n = u_n - 10 \times (0.5)^n$ وبالتالي $u_n = v_n + 10 \times (0.5)^n$ اذن $u_n = -8 \left(\frac{1}{5} \right)^n + 10 \times (0.5)^n$ من

اجل كل عدد طبيعي n (0.5ن)

(ج) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (0.5ن)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-8 \left(\frac{1}{5} \right)^n + 10(0.5)^n \right] = 0 \quad \text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (0.5)^n = 0 \quad \text{حيث } \frac{1}{5} < 1$$

0.5 عنصران من المجال $]-1;1[$.

(4) حساب المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ (01ن)

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S_n = v_0 + 10(0.5)^0 + v_1 + 10(0.5)^1 + \dots + v_n + 10(0.5)^n$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 10[(0.5)^0 + (0.5)^1 + \dots + (0.5)^n]$$

$$S_n = -8 \left[\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{5} - 1} \right] + 10 \left[\frac{(0.5)^{n+1} - 1}{0.5 - 1} \right]$$

$$S_n = 10 \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1 \right] - 20[(0.5)^{n+1} - 1]$$

$$S_n = 10 \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 20(0.5)^{n+1} + 10$$

التمرين الثاني : (11 نقطة)

(1) حساب $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$ (0.5+0.5ن)

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) أ) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \left(\frac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1} \right)$ (01ن)

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x - \frac{e^{-x}}{4}}{e^x + \frac{e^{-x}}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x - e^{-x}}{4e^x + e^{-x}}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x - e^{-x}}{4e^x + e^{-x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(4e^{2x} - 1)}{e^{-x}(4e^{2x} + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1}$$

(ب) دراسة اشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم انجاز جدول تغيرات الدالة f (01ن)

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 4e^{2x} - 1 = 0 \text{ يعني } (2e^x - 1)(2e^x + 1) = 0 \text{ يعني } 2e^x - 1 = 0 \text{ يعني}$$

$$x = -\ln 2$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -2\ln 2]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-2\ln 2; +\infty[$.

جدول التغيرات:.....(0.5ن)

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\ln 2)$	$+\infty$

$$f(-\ln 2) = 0$$

(3) نبين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (Cf) بجوار $+\infty$

$$f(x) - y = \ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right) - x$$

$$f(x) - x = \ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right) - \ln e^x$$

$$f(x) - x = \ln\left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{e^{-x}}{4e^x}\right)$$

$$f(x) - x = \ln\left(1 + \frac{e^{-2x}}{4}\right)$$

اذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \ln 1 = 0$ (01ن)

وبالتالي : المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (Cf) بجوار $+\infty$

(ب) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = -x - 2\ln 2 + \ln(4e^{2x} + 1)$.

من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = \ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{4e^x + e^{-x}}{4}\right)$$

.....(01.5ن)

$$f(x) = \ln(4e^x + e^{-x}) - \ln 4$$

$$f(x) = \ln e^{-x} (4e^{2x} + 1) - \ln 2^2$$

$$f(x) = \ln e^{-x} + \ln(4e^{2x} + 1) - 2 \ln 2$$

$$f(x) = -x - 2 \ln 2 + \ln(4e^{2x} + 1)$$

(ج) استنتاج ان المنحنى (Cf) يقبل مستقيما مقاربا اخر (Δ') بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له
بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(4e^{2x} + 1)] = \ln 1 = 0$ فان المنحنى (Cf) يقبل مستقيما مقاربا اخر (Δ') بجوار

$-\infty$ معادلة له $y = -x - 2 \ln 2$ (01ن)

(4)تعيين نقط تقاطع المنحنى (Cf) مع محور الترتيب ثم رسم المنحنى (Cf)(01ن)

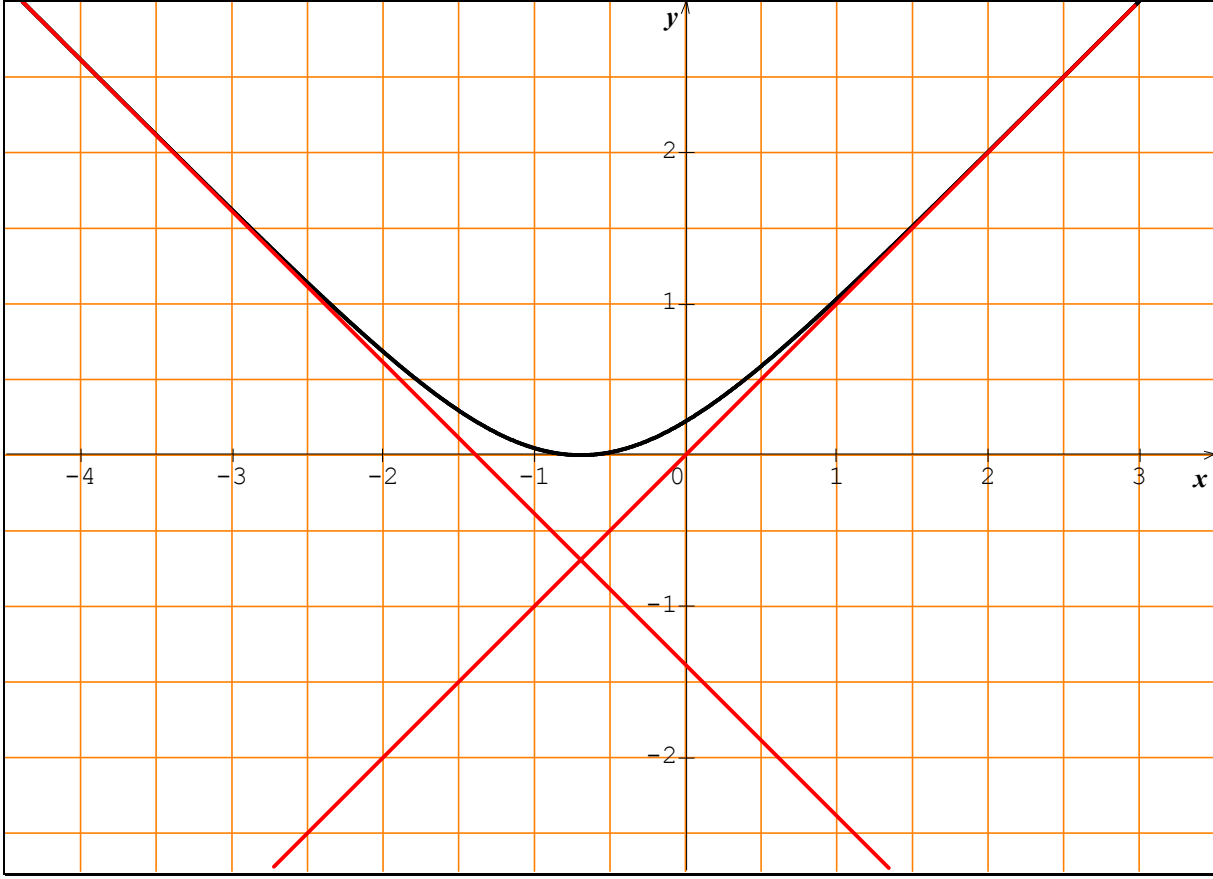
$$(Cf) \text{ يقطع محور الترتيب يعني } f(x) = 0 \text{ يعني } \ln\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right) = 0 = \ln 1 \text{ يعني}$$

$$\left(e^x + \frac{e^{-x}}{4}\right) = 1 \text{ يعني } 4e^x + e^{-x} = 4 \text{ يعني } 4e^{2x} + 1 = 4e^x \text{ يعني } 4e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 .$$

$$\text{يعني } (2e^x - 1)^2 = 0 \text{ يعني } (2e^x - 1) = 0 \text{ يعني } x = -\ln 2$$

$$\text{اذن : } (Cf) \cap (yy') = \{A(-\ln 2; 0)\}$$

رسم المنحنى (Cf)(01.5ن)



(5) المناقشة بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (1) (01ن)

حلول المعادلة (1) هي فواصل تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو معادلة $y = m - 2$

- إذا كان : $m - 2 < 0$ أي $m < 2$ المعادلة لا تقبل حلولاً .

- إذا كان : $m - 2 = 0$ أي $m = 2$ المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً سالباً .

- إذا كان : $m - 2 < -\ln 2$ أي $m < 2 - \ln 2$ المعادلة تقبل حلين متميزين سالبين .

- إذا كان : $m - 2 = -\ln 2$ أي $m = 2 - \ln 2$ المعادلة تقبل حلين متميزين أحدهما سالب

والآخر معدوم .

- إذا كان : $m - 2 > -\ln 2$ أي $m > 2 - \ln 2$ المعادلة تقبل حلين متميزين أحدهما موجب

والآخر سالب .