

بتاريخ: 2017/10/17

المدة: ساعة

ثانوية: زريمش عيسى (حمام دباغ)

المستوى: 3عج + 3تر + 3ر

فرض الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

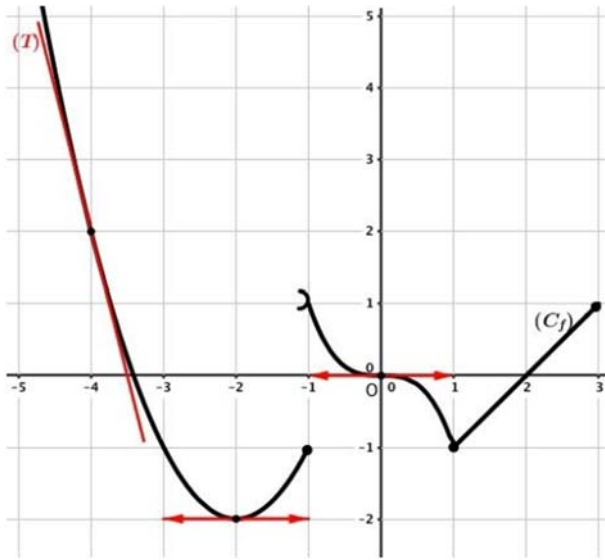
التمرين الأول: (06 نقاط)

اجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ، 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = +\infty$ ، 3 القيمة التقريبية للعدد $(0.98)^2$ هي 0.96

4 حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x^2}$ في $]0; +\infty[$ هي الدوال y حيث: $y = \frac{1}{x} + c$ مع c ثابت حقيقي.

التمرين الثاني: (06 نقاط)



f دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty; 3]$ بتمثيلها البياني (C_f) في الشكل المقابل، (T) مماس لـ (C_f) في النقطة التي فاصلتها (-4)

1 بقراءة بيانية:

أ/ عين: $f'(-4)$ ، $f(-4)$ ، $f'(-2)$ ، $f(-2)$

ب/ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

ج/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{\tan x}{x}\right)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$

2 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α في $[-4; -3]$

3 أكتب معادلة المماس (T) .

4 شكل جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $]-\infty; -2]$ بـ: $g(x) = f(x+1)$

التمرين الثالث: (08 نقاط)

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-1} ; x \in [1; +\infty[\\ f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1} ; x \in]-\infty; 1[\end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

1 أوجد الأعداد الحقيقية $a; b; c$ حيث: $x \in]-\infty; 1[$ و $f(x) = \frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{2(x^2+1)}$

2 أ/ بين أن الدالة f مستمرة عند 1.

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أحسب كل من: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1}$ ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانياً.

3 أ/ لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f . بين أن:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}} ; x \in [1; +\infty[\\ f'(x) = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2} ; x \in]-\infty; 1[\end{cases}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ب/ بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

4 بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف في المجال $]-\infty; 1[$ يطلب تعيين إحداثيتهما. 5 ارسم (Δ) و (C_f) .

3 كتابة معادلة المماس (T):

$$(T): y = -4x - 14 \text{ ومنه } (T): y = f'(-4)(x+4) + f(-4)$$

4 تشكيل جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $]-\infty; -2]$

$$g'(x) = f'(x+1), \quad g(x) = f(x+1):$$

x	$-\infty$	-3	-2
g'(x)	-	0	+
g(x)	$+\infty$		-1

التمرين الثالث: (08 نقاط)

1 إيجاد الأعداد الحقيقية a, b, c حيث $x \in]-\infty; 1]$ و

$$f(x) = \frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{2(x^2+1)}$$

$$f(x) = -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{-2x^3+3x^2-4x+3}{2(x^2+1)}$$

باستعمال طريقة هورنر نجد:

$$c = -3; b = 1; a = -2 \text{ ومنه}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{2(x^2+1)}$$

	-2	3	-4	3
1		-2	1	-3
	-2	1	-3	0

2 أ/ نبين أن الدالة f مستمرة عند 1:

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\sqrt{x^2-1} = 0, \quad f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ فإن } f \text{ مستمرة عند } 1.$$

$$\text{ب/ حساب مايلي: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)\sqrt{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{(x-1)2(x^2+1)} = -1$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \text{ فإن الدالة } f \text{ غير قابلة}$$

للاشتقاق عند 1.

التفسير البياني: $A(1;0)$ هي نقطة زاوية للمنحنى (C_f)

2018/2017

ثانوية: زريمش عيسى

تصحيح الفرض الأول للثلاثي الأول--3 عتج +3 تر+ 3 ر

التمرين الأول: (06 نقاط)

سؤال 1	سؤال 2	سؤال 3	سؤال 4
صحيح	خاطئ	صحيح	خاطئ

التبرير: (1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

2 لدينا: $1+2+3+\dots+n = \frac{n}{2}(1+n)$ مجموع حدود متتالية

حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1 وحدها الأخير n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

3 بوضع: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ لدينا $(0.98)^2 = f(1-0.02)$

$$h = -0.02; x_0 = 1, \quad f(x_0+h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$$

$$\text{بما أن } (0.98)^2 \approx 0.96 \text{ فإن } f(1-0.02) \approx 0.02f'(1) + f(1)$$

4 حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x^2}$ في $]0; +\infty[$ هي

$$\text{الدوال } y \text{ حيث: } y = -\frac{1}{x} + c \text{ مع } c \text{ ثابت حقيقي.}$$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

1 بقراءة بيانية: أ/ تعيين:

$$f'(-4) = -4, \quad f(-2) = -2, \quad f(-4) = 2, \quad f'(-2) = 0$$

$$\text{ب/ } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \text{ بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ فإن الدالة غير مستمرة عند } -1$$

$$\text{ج/ } \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{\tan x}{x}\right) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-0}{x-0} = f''(0) = 0$$

2 نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α في $[-4; -3]$

لدينا: الدالة f معرفة ومستمرة ورتيبة تماما على $[-4; -3]$ و

$$f(-4) = 2, \quad f(-1) = -1 \text{ لأن } f(-4)f(-3) < 0$$

المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α في $[-4; -3]$

ندرس إشارة الفرق: $\left[f(x) - \left(-x + \frac{3}{2}\right) \right] = -\frac{x}{x^2+1}$

x	$-\infty$	0	1
$-x$	+	○	-
x^2+1	+	+	+
$\frac{-x}{x^2+1}$	+	○	-
وضعية (C_f) بالنسبة (Δ)	$(C_f) \cap (\Delta) = \left\{ A' \left(0; \frac{3}{2} \right) \right\}$		

(4) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف في المجال

$]-\infty; 1[$ **يطلب تعيين إحداثيتهما:**

لدينا: $f'(x) = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}; x \in]-\infty; 1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال $]-\infty; 1[$:

$$f''(x) = \frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3} = -\frac{2x(x^2-3)}{x^6+3x^4+3x^2+1}$$

إشارة $f''(x)$ على $]-\infty; 1[$:

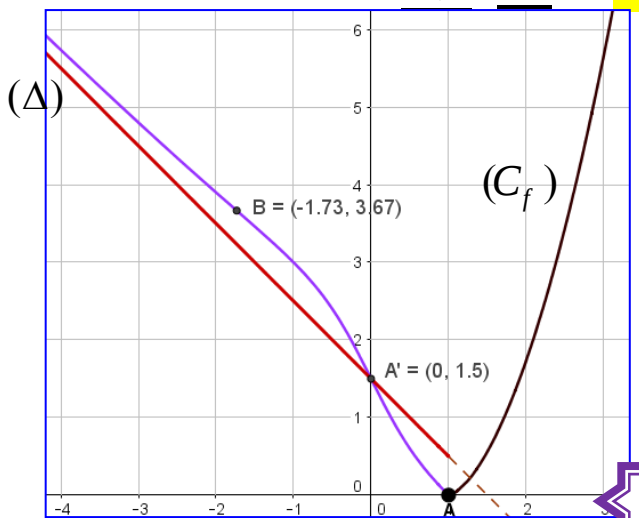
x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	1
$-2x$	+	+	○	-
x^2-3	+	○	-	-
$(x^2+1)^3$	+	+	+	+
$f''(x)$	+	○	-	+

$f''(x)$ انعدمت مغيرة إشارتها عند 0 و $-\sqrt{3}$ ومنه:

المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف في المجال $]-\infty; 1[$ هما

$$\frac{5}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{2} = 3.67, B \left(-\sqrt{3}; \frac{5}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{2} \right) \text{ و } A' \left(0; \frac{3}{2} \right)$$

(5) رسم (Δ) و (C_f):



(3) أ/ نبين أن:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}; x \in]1; +\infty[\\ f'(x) = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}; x \in]-\infty; 1[\end{cases}$$

*الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x) = \sqrt{x^2-1} + \frac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

*الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x) = -1 - \frac{(x^2+1)-2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

ومنه:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}; x \in]1; +\infty[\\ f'(x) = -\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}; x \in]-\infty; 1[\end{cases}$$

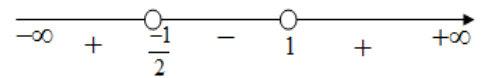
**** تشكيل جدول تغيرات الدالة f :**

**** إشارة $f'(x)$ في المجال $]1; +\infty[$:**

إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة البسط لأن المقام موجب

$f'(x) = 0$ يكافئ $\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}} = 0$ يكافئ $2x^2-x-1=0$

حساب Δ : $\Delta = 9$ ، $x_1 = 1$ أو $x_2 = -\frac{1}{2}$ مرفوضين



بما أن $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماماً على $]1; +\infty[$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 1[$: لدينا $-\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2} < 0$

بما أن $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماماً على $]-\infty; 1[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

ب/ نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ)

بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته: من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(-x + \frac{3}{2}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x}{x^2+1} \right) = 0$$

م.م. مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ (Δ): $y = -x + \frac{3}{2}$

**** دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ):**