

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية تواتي حمد لخضر
متقن ميلودي العروسي
ثانوية بحري بكار

دورة : ماي 2017

المدة : 04 سا

وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية ولاية الوادي
امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي
الشعبة : رياضيات.

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

(1) حل في Z^2 المعادلة التالية ذات المجهول $(x; y)$: $6x - 5y = 7$

(2) عين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث :
$$\begin{cases} a \equiv 3[5] \\ a \equiv -4[6] \end{cases}$$

(3) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5

ب- أثبت من أجل كل عدد طبيعي n أن : $x^n \equiv 2^n [5]$

ج - عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \equiv 2 [5]$

(4) العدد الطبيعي $\overline{1438}$ مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس α

جد أصغر قيمة للعدد الطبيعي α بحيث يكون :

$$2017^{2018} + 8^{2016} + \overline{1438} \equiv 0 [5]$$

التمرين الثاني: (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب

$$Z_C = Z_A + Z_B, \quad Z_B = 2 + 2\sqrt{3}i, \quad Z_A = 2\sqrt{3} - 2i$$

(1) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب Z_C

(2) أ- ليكن θ عمدة للعدد المركب Z_C

باستعمال العلاقتين التاليتين : $\cos(2\theta) = 2(\cos \theta)^2 - 1$ و $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \times \cos \theta$

أ- أثبت أن : $\arg(Z_C) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

ب - أكتب Z_C على الشكل المثلثي ثم الأسى

ج - عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $(Z_C)^n$ حقيقي ، ثم استنتج أن $(Z_C)^{2028}$ عدد حقيقي

(3) (E) مجموعة النقط M صورة Z في المستوي المركب حيث :

$$(Z - 2\sqrt{3} + 2i)(\bar{Z} - 2\sqrt{3} - 2i) = Z_B \times \bar{Z}_B$$

أ- برهن من أجل كل عدد مركب Z أن : $Z \times \bar{Z} = |Z|^2$

ب) تحقق أن النقطة C من (E) ثم حدد مجموعة النقط (E) .

(4) $(\tilde{E})$ مجموعة النقط M صورة Z في المستوي المركب حيث :

$$Z = 2 + 2\sqrt{3}i + 4e^{i\theta} \quad , \quad (\theta \text{ حدد حقيقي})$$

عين المجموعة $(\tilde{E})$ ثم تحقق أن النقطة C من $(\tilde{E})$

(5) أ- حدد طبيعة التحويل النقطي R مع ذكر عناصره المميزة الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة

$$(Z - Z_C) = e^{-i\frac{\pi}{2}} (Z - Z_C)$$

ب- تحقق أن $(\tilde{E})$ هي صورة (E) بالتحويل R .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1, 1, -1)$, $B(1, 1, 0)$, $I(1, 0, 0)$ و $J(0, 1, 0)$ و $K(0, 0, 1)$
- المطلوب : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية مع التعليل :
- (1) النقط A, I, J و K تنتمي إلى : (أ) مستقيم واحد (ب) مستو واحد (ج) لا تنتمي إلى مستو واحد
 - (2) معادلة المستوي (IAB) هي: (أ) $x = 1$ (ب) $y = 1$ (ج) $z = -1$
 - (3) (S) سطح كرة مركزها O و نصف قطرها $\frac{1}{2}$, المستقيم (IJ) : (أ) يقطع السطح (S) (ب) لا يقطع السطح (S) (ج) يمس السطح (S)
 - (4) مجموعة النقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z) تحقق: $(x + y - z + 1)^2 + (y + x)^2 = 0$ هي تمثل : (أ) مستقيم (ب) مستوي (ج) مجموعة خالية

التمرين الرابع: (7 نقاط)

- I- g الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$
- أدرس تغيرات الدالة g ، ثم استنتج إشارتها .
- II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = e^x \times \ln(1 + e^{-x})$
- وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- (1) بوضع: $t = e^{-x}$ بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x)f = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتائج هندسيا .
 - (2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\hat{f}(x) = e^x \times g(e^{-x})$
 - (3) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f . ثم شكل جدول تغيراتها .
 - (4) أرسم المنحنى (C_f) (تعطى -0.7 فاصلة نقطة انعطاف للمنحنى (C_f))
 - (5) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن : $\hat{f}(x) - f(x) = \frac{-e^x}{e^{x+1}}$ ثم استنتج دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$
 - ب- أحسب مساحة الحيز في المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت $x = 0$ ، $x = 1$ و $y = 0$
 - (6) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $\ln(1 + e^x) - m e^{-x} - x = 0$
 - (7) بين من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1; 0]$ لدينا : $0 \leq \hat{f}(x) \leq g(e)$
 - (8) بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1; 0[$
- III- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = -f(u_n)$
- 1- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in [-1; 0]$
 - 2- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq g(e) |u_n - \alpha|$
 - 3- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - \alpha| \leq [g(e)]^n$
 - 4- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، (تعطى : $g(e) \simeq 0.6$)

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1$

- 1 - أ) أحسب الحدود u_1, u_2, u_3
 ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n)
- 2 - أ) برهن بالتراجع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < n + 3$
 ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- 3 - لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - n$
 أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول v_0
 ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
 ج) هل المتتالية (u_n) متقاربة.
- 4 - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + 2v_n$
 بين أن : $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 6$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}; 0)$ ، نعتبر النقط $A(-7; 0; 4)$ ، $B(2; 1; 3)$

$C(3; 2; 4)$ و $D(-3; -6; 6)$ والمستوي (p) معادلته $2x - 3y + z - 4 = 0$

- 1- تحقق أن النقطتين B و C من المستوي (p)
- 2- بين (p) هو المستوي المحوري للقطعة $[AD]$
- 3- أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AD)
- 4- تحقق أن النقطة $H(-5; -3; 5)$ هي نقطة تقاطع المستقيم (AD) والمستوي (p)
- 5- علماً أن حجم الرباعي $ABCH$ هو 10 (وحدة حجم). استنتج مساحة المثلث BCH
- 6- أ) بين أن التمثيل الوسيطى للمستوي (p) معرف بـ : $\begin{cases} x = \alpha + 7\lambda + 2 \\ y = \alpha + 4\lambda \\ z = \alpha - 2\lambda \end{cases}$ و α و λ عددين حقيقيين
 ب) لتكن M نقطة كيفية من المستوي (p) ، أثبت أن الجداء $\vec{AM} \cdot \vec{AD}$ مستقل عن الوسيطين α و λ
 ج) عين قيمتي α و λ بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن ثم استنتج هذه المسافة

التمرين الثالث : (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلتين ذات المجهول Z حيث:

$$(1) \quad Z^3 - 2Z^2 + 5Z = 0 \quad , \quad (2) \quad Z^3 + Z^2 + 4Z + 4 = 0$$

- I - 1 - بين إذا كان Z_0 حلاً للمعادلة (1) فإن $(Z_0 - 1)$ حلاً للمعادلة (2).
- 2 - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) ثم استنتج حلول المعادلة (2)
- II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{u}; \vec{v}; 0)$ نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب : $Z_A = -1$ ، $Z_B = 1 + 2i$ ، $Z_C = 1 - 2i$

- 1 - أكتب على الشكل الأسى العدد المركب $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
- 2 - استنتج تحويلا T في المستوي المركب يحول النقطة C إلى النقطة B والنقطة A إلى نفسها مع ذكر عناصره المميزة
- 3 - عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC
- 4 - h التحويل النقطي في المستوي الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $\acute{M}(\acute{z})$
المعرف بالعلاقة : $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
(أ) أثبت أن : $\overrightarrow{GM} = 4 \overrightarrow{GM}$
(ب) أكتب الصيغة المركبة للتحويل h وحدد طبيعته مع ذكر عناصره المميزة
- 5 - (أ) التحويل S المعروف بـ : $S = T \circ h$ هو تشابه مباشر يطلب نسبته وزاويته .
(ب) أحسب مساحة المثلث $\acute{A}\acute{B}\acute{C}$ صورة المثلث ABC بالتحويل S
- 6 - عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\underbrace{SOSO \dots OS}_{(n \text{ مرة})}$ تحاكيا نسبته موجبة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I - لتكن g دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل : $g(x) = 1 - e^{1-x} + \ln x$
1- أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها .
2- أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
- f - II دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = e^{1-x} + x \ln x & : x > 0 \\ f(0) = e \end{cases}$
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
1- (أ) بيّن أن f مستمرة على يمين الصفر .
(ب) أدرس قابلية اشتقاق f على يمين الصفر .
2- (أ) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.
(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
3- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أنشئ (C_f) .
4 - (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $\int_1^e x \ln x \, dx$
(ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها : $x = 1$, $x = e$ و $y = 0$
- 5 - (أ) عين قيم العدد الحقيقي الموجب تماما m التي من اجلها تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلين في المجال $[0, +\infty[$ (تعطى $f(2.66) \simeq e$)
(ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $e\left(\frac{1}{e^x} - 1\right) = m + x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
- III - h الدالة المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $h(x) = \ln [f(x)]$
1- أحسب $h'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $f(x)$ ثم استنتج إشارة $h'(x)$
2- شكّل جدول تغيرات الدالة h .