

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (3,5 نقاط)

لكل سؤال توجد إجابة واحدة فقط صحيحة حددها مع التعليل :
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1 لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء والتي تحقق : $(2x + y - z - 1)^2 + (x + y - z)^2 = 0$
المجموعة (Γ) هي :

أ/ مستقيم	ب/ مستوي	ج/ سطح كرة
2 (Δ) و (Δ') مستقيمان معرفان وسيطيا كما يلي : $t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ و $t' \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 3 - 2t' \\ y = 7 - 4t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$ (Δ')		

و (S) سطح كرة مركزها $\Omega(1,1,0)$ ونصف قطرها 2 .

• (Δ) و (Δ') هما مستقيمان :

أ/ متوازيان	ب/ متقاطعان	ج/ ليسا من نفس المستوي
-------------	-------------	------------------------

• تقاطع (S) مع (Δ) هو :

أ/ مجموعة خالية	ب/ نقطة	ج/ نقطتين
-----------------	---------	-----------

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

1 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n \leq 2$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة , ثم استنتج أنها متقاربة .

2 (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- اكتب كلا من v_n ثم u_n بدلالة n , ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3 من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $w_n = u_n - 1$

• احسب بدلالة n الجداء π_n حيث : $\pi_n = w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

$p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$: والمعرف ب z كثير الحدود للمتغير المركب z

(1) أ- بين أن العدد 4 جذر ل $p(z)$.

ب - عين العددين الحقيقيين a و b بحيث : $p(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$

ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $p(z) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

ولتكن النقط A, B, C لواحقها على الترتيب : $z_A = 4, z_B = 1 + i\sqrt{3}, z_C = \overline{z_B}$

أ - أنشئ بعناية النقط A, B, C .

ب - ما طبيعة المثلث ABC ؟ علل إجابتك .

(2) لتكن النقطة K ذات اللاحقة $z_K = -\sqrt{3} + i$

أ - عين z_F لاحقة النقطة F صورة النقطة K بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ب - عين z_G لاحقة النقطة G صورة النقطة K بالإنسحاب الذي شعاعه $\overline{OB}$.

ج - أثبت أن المستقيمين (OC) و (OF) متعامدان .

د - علم النقطتين K و G ثم بين أن الرباعي $OBGK$ مربع .

التمرين الرابع : (7,5 نقاط)

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $D =]0, +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) استنتج إشارة الدالة g .

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D =]0, +\infty[$ كالتالي : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

(1) أ - أوجد نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعلى يمين 0 . فسر هندسيا النتيجة الثانية .

ب - بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) .

ج - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) .

(2) أ - تحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها , ثم شكل جدول تغيراتها .

ج - اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$

(3) - أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

(4) - انشئ المنحني (C) والمستقيمين (Δ) و (T) .

الجزء الثالث : نضع من أجل كل x ينتمي إلى D : $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

(1) - أحسب $h'(x)$. ماذا تستنتج ؟

(2) - أوجد S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) وبالمستقيمات التي معادلاتها : $x=1, x=e, y=0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, نعتبر النقط $A(-2, -1, 3)$, $B(1, 3, 5)$, $C\left(2, -\frac{1}{2}, -4\right)$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 - 6t \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

المعرف بتمثيله الوسيطى : (Δ) والمستقيم $D(2, -2, -3)$ و

- (1) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .
- (2) بين أن (Δ) و (AB) ليسا من نفس المستوي .
- (3) (P) مستوي يوازي (Δ) ويشمل (AB) .
- أ - بين أن الشعاع $\vec{n}(2, -2, 1)$ ناظمي للمستوي (P) .
- ب - استنتج معادلة ديكرتية للمستوي (P) .
- ج - بين أن المسافة بين نقطة كيفية M من (Δ) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M .
- (4) تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن النقطة C تنتمي إلى المستوي (P) .
- أ - بين أن المثلث ABC قائم في A , واحسب مساحته .
- ب - احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على $]-2, +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x - \ln(x+2)$ و (C) منحناها البياني في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل في الوثيقة المرفقة)

- (1) أحسب $g(-1)$. بقراءة بيانية حدد اتجاه تغير الدالة g .
- (2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = g(u_n)$
- أ - مثل الحدود u_0 , u_1 , u_2 , u_3 مستعينا بالمنحنى (C) مظهرا خطوط الرسم (التمثيل على الوثيقة المرفقة)
- ب - ضع تخمينا حول تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .
- (3) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$
- ب - بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .
- ج - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة , أحسب نهايتها .
- (4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $n \geq 1$

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_n = \ln[(u_0 + 2)(u_1 + 2) \dots (u_{n-1} + 2)] \end{cases}$$
- أ - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 - u_n$
- ب - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + 2)(u_1 + 2) \dots (u_{n-1} + 2)$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (الوحدة 4cm)

لتكن النقط A, B, C, D التي لواحقها على الترتيب $z_A = i, z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}, z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}, z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و

(1) أ - أكتب z_B و z_C على الشكل الجبري ثم علم النقط A, B, C, D .

ب - بين أن النقطة D هي مرجح الجملة $\{(A, 2), (B, -1), (C, 2)\}$.

ج - بين أن النقط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة .

(2) ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 . نسمي E صورة D بواسطة h .

أ - أوجد العبارة المركبة للتحاكي h .

ب - بين أن لاحقة E هي $z_E = \sqrt{3}$ ثم علم النقطة E .

(3) لتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $|z - z_C| = |\bar{z} + z_A|$

• عين طبيعة المجموعة (F) ثم أكتب معادلة ديكارتية لها .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{(x+1)e^x + x + 2}{e^x + 1}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول: 2cm].

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$

(3) ادرس اتجاه تغير f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) برهن أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-2 < \alpha < -1$.

(5) أ - أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + 1 + \frac{1}{e^x + 1}$ وأن $f(x) = x + 2 - \frac{e^x}{e^x + 1}$.

ب - استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (D) و (D') يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .

ج - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = 3$ ، ثم فسر النتيجة هندسيًا .

(6) أ - أنشيء (D) ، (D') و المنحني (C_f)

ب - احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها:

$$y = x + 2 ; x = 1 ; x = 0$$

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين $(x+1)e^x + x + 2 = xe^x + me^x + x + m$

