

الموضوع الأول

التمرين الأول (03 نقاط) : أعط تفسيرا بيانيا لكل نتيجة من النتائج التالية :

(1) f دالة مستمرة على مجال $[A; B]$ و x_0 عدد حقيقي من هذا المجال :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \quad \text{لدينا :}$$

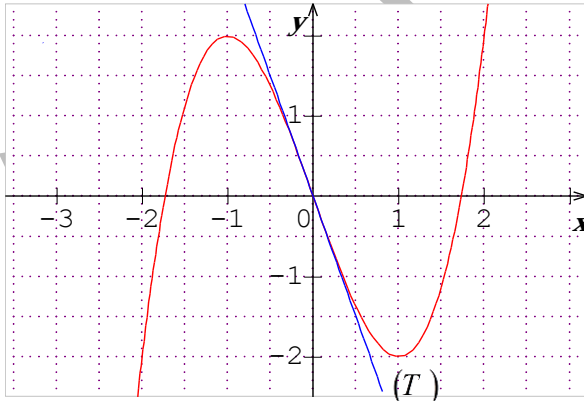
(2) لدينا $f(x) = ax + b + g(x)$ وكان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

(3) للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α حيث : $\alpha \in [A; B]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x^2] = 0 \quad (4)$$

التمرين الثاني (04 نقاط) :

(I) أذكر نص مبرهنة القيم المتوسطة



(II) لتكن الدالة f المعرفة على $[-2, 2]$ و (T) مماس للمنحنى (C_f)

في النقطة ذات الفاصلة $x = 0$ ، (C_f) منحنائها البياني كما هو موضح

بالشكل المقابل :

1. بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث

$$\alpha \in [-2, -1]$$

2. حل بيانيا المعادلات : $f'(x) = 0$ ، $f(x) = -2$

3. ماذا تمثل هذه النقطة $O(0,0)$ مع التبرير

4. أحسب ما يلي : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)}$

التمرين الثالث (04 نقاط) : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + e^x + 2x$

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $-e^{2x} + e^x + 2 = 0$

(2) عين قيم x في كل حالة :

• للدالة f قيم حدية محلية يطلب تعيينها

• الدالة f متزايدة تماما و متناقصة تماما .

(3) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بـ: $g(x) = -[\ln(x+1)]^2 + \ln(x+1) + 2$.

➤ عين نقط تقاطع (C_g) مع محور الفواصل

التمرين الرابع (09 نقاط):

الجزء الأول : لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} - x - 2$

1. ادرس تغيرات الدالة g (تعطى $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$)

2. بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in [-1, 0]$

3. عين اشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)(1-e^{-x})$

(1) عين اشارة $f(x)$

(2) احسب نهايات الدالة f

(3) بين انه من أجل كل أن: $f'(x) = e^{-x} g(-x)$

(4) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) بين أن: $f(\alpha) = 1 - \alpha^2$ ثم عين حصرا لـ: $f(\alpha)$.

(6) بين ان المستقيم $y = x - 1$: (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

(7) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

(8) ليكن (T_m) مستقيم معادلته $y = x + m$ ، m وسيط حقيقي

❖ عين قيمة m التي يكون من أجلها (T_m) مماسا لـ (C_f) في نقطة يطلب تعيين احداثياتها.

(9) انشئ كل من (C_f) و (Δ) و المماس في معلم متعامد ومتجانس (مساعدة $f(-1) = 3.43$)

(10) عين قيم m التي من أجلها المعادلة $(m+1)e^x + x - 1 = 0$ لا تقبل حلول.

التمرين الأول (03 نقاط) :

أعط تفسيراً بيانياً لكل نتيجة من النتائج التالية :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -f(x_0) \quad \diamond$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x + 2] = 3 \quad \diamond$$

$$\diamond \text{ للمعادلة } f(x) = 1 \text{ حل وحيد } \alpha \text{ حيث : } \alpha \in]A; B]$$

$$\diamond \text{ العدد الحقيقي } a \text{ يحقق : } f'(a) = 0 \text{ و } f'(x) > 0 \text{ من أجل كل } x \in D_f$$

التمرين الثاني (04 نقاط) :

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{لتكن } f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ :}$$

(1) هل الدالة f مستمرة عند $x = 0$

(2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 0$ ثم فسر النتيجة هندسياً

(3) احسب النهايات

(4) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين الثالث (04 نقاط) :

$$f(x) = (e^x + 1)(3 - e^x) \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ :}$$

$$(1) \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة التالية : } -2e^{2x} + 2e^x = 0$$

(2) عين قيم x في كل حالة :

• فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

• للدالة f قيم حدية محلية يطلب تعيينها

• الدالة f متزايدة تماماً ومتناقصة تماماً على مجال يطلب تعيينه

$$(3) \text{ لتكن الدالة } g \text{ المعرفة على المجال }]-1, +\infty[\text{ بـ : } g(x) = -2[\ln(x+1)]^2 + 2\ln(x+1)$$

➤ عين نقط تقاطع (C_g) مع محور الفواصل

التمرين الرابع (09 نقاط):

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ: $f(x) = x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

وليكن لمنحنى (C_f) هو التمثيل البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب كل من : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(2) بين أنه من أجل كل x من D : $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x - 1)^2}$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f

(4) بين أن الدالة f دالة فردية

(5) استنتج كل من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. ثم أكتب جدول التغيرات.

(6) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in]0, +\infty[$

(7) استنتج حلا آخر للمعادلة $f(x) = 0$ ينتمي إلى $]-\infty, 0[$

(8) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$: مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

(9) استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.

(10) ادرس الوضع النسبي لكل من (C_f) و (Δ) ثم (C_f) و (d)

(11) انشئ كل من (C_f) والمستقيمات المقاربة في نفس المعلم

(12) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x - m + 1$

العمل المستمر والمنظم هو بداية النجاح

بالتوفيق أستاذ المادة : ز. أسامة

ثانوية الشيخ عمر المختار حل الموضوع الاول: الاستاذ: زيان أسامة
التمرين الاول: التفسير الهندسي لكل عبارة

(1) النقطة $(x_0, f(x_0))$ نقطة زاوية و (C_f) يقبل نصف مماس على
يمين ويسار x_0 ميل كل منها 1 و -1

(2) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ م م ل (C_f) بجوار $+\infty$

(3) (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α حيث $\alpha \in]A; B[$

(4) بيان الدالة مربع منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

التمرين الثاني: (1) نص مبرهنة القيم المتوسطة.

(2) اثبات ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in [-2, -1]$

من البيان الدالة f دالة معرفة ومستمرة ورتيبة على المجال $[-2, -1]$

ولدينا: $\begin{cases} f(-2) = -2 \\ f(-1) = 2 \end{cases}$ و $f(-2) \times f(-1) < 0$

ومنه ح م ق م المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in [-2, -1]$

(3) المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلان هما $x = 1$ او $x = -1$

المعادلة $f(x) = -2$ تقبل حلان هما $x = 1$ او $x = -2$

(4) النقطة $O(0,0)$ هي نقطة إنعطاف

التبرير: لان المماس عند $O(0,0)$ يخترق المنحنى (C_f)

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)} = e^{-\infty} = 0$

التمرين الثالث:

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $-e^{2x} + e^x + 2 = 0$

بوضع: $e^x = t$, $e^{2x} = t^2$

تصبح المعادلة من الشكل: $(1) -t^2 + t + 2 = 0$

$\Delta = 9$ للمعادلة (1) حلان هما $t = -1$ او $t = 2$

وبالتالي لما: $t = -1 = e^x$ مرفوض ولما $t = 2 = e^x$ أي $x = \ln 2$

ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو $S = \{\ln 2\}$

(2) تعين قيم x في كل حالة:

الدالة f قيم حدية محلية: معناه حلول المعادلة $f'(x) = 0$

لدينا: $x = \ln 2$ أي $f'(x) = -e^{2x} + e^x + 2 = 0$

ومنه توجد قيمة حدية وحيدة $(\ln 2, f(\ln 2))$ أي $(\ln 2, 2 \ln 2)$

الدالة f متزايدة تماما ومتناقصة تماما.

ندرس اشارة $f'(x)$.

لما $x \in]\ln 2, +\infty[$ فان $f'(x) < 0$ ومنه f' دالة متناقصة تماما

لما $x \in]-\infty, \ln 2[$ فان $f'(x) > 0$ ومنه f' دالة متزايدة تماما

(3) نقط تقاطع (C_g) مع محور الفواصل

معناه حل المعادلة $g(x) = -[\ln(x+1)]^2 + \ln(x+1) + 2 = 0$

بوضع: $\ln(x+1) = r$, $[\ln(x+1)]^2 = r^2$

تصبح المعادلة من الشكل: $(1) -r^2 + r + 2 = 0$

حلاها هما $r = -1$ او $r = 2$

لما: $r = -1 = \ln(x+1)$ أي $x+1 = e^{-1}$ ومنه $x = e^{-1} - 1$

ولما $r = 2 = \ln(x+1)$ أي $x+1 = e^2$ ومنه $x = e^2 - 1$

ومنه فواصل نقط تقاطع (C_g) مع محور الفواصل $S = \{e^{-1} - 1, e^2 - 1\}$

التمرين الرابع:

g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = e^{-x} - x - 2$

(1) دراسة التغيرات

المشتق واتجاه التغير: $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ ومنه g دالة متناقصة

تماما على $\mathbb{R}$, جدول التغيرات

(2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in [-1, 0]$

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

(3) اشارة $g(x)$.

لما $x \in]\alpha, +\infty[$ فان $g(x) < 0$ ، لما $x \in]-\infty, \alpha[$ فان $g(x) > 0$

(II) f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x-1)(1-e^{-x})$

اشارة $f(x)$: لما $x \in [0, 1]$ فان $f(x) \leq 0$

لما $x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ فان $f(x) \geq 0$.

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

اثبات أن: $f'(x) = e^{-x} g(-x)$

اتجاه التغير:

لما $x \in]-\infty, -\alpha[$ فان f متناقصة تماما، لما $x \in]-\alpha, +\infty[$

فان f متزايدة تماما.

تبيان: $f(\alpha) = 1 - \alpha^2$: $e^{-\alpha} = \alpha + 2$ بالتعويض في $f(\alpha)$ والتبسيط

نجد: $f(\alpha) = 1 - \alpha^2$. الحصر: $0 \leq f(\alpha) \leq 1$

تبيان ان المستقيم $y = x - 1$ م.م.م لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$

الوضع النسبي:

ندرس اشارة: $f(x) - (x-1)$

لما $x \in]-\infty, 1[$ فإن: (C_f) فوق (Δ) .

لما $x \in]1, +\infty[$ فإن: (C_f) تحت (Δ) .

لما $x = 1$ فإن: (C_f) يقطع (Δ) .

تعين قيمة m التي يكون من أجلها (T_m) مماسا لـ (C_f)

معناه حل المعادلة: $f'(x_0) = 1$ أي $x_0 = 2$

معادلة المماس عند $x_0 = 2$ هي: $(T): y = x - 1 - e^{-2}$

بالمطابقة نجد: $m = -1 - e^{-2}$

عين قيم m التي من أجلها المعادلة $(m+1)e^x + x - 1 = 0$ لا تقبل حلول

$(m+1)e^x + x - 1 = 0$ تكافئ: $f(x) = x + m$

من البيان نجد قيم m هي: $m \in]-\infty, -1 - e^{-2}[$

حل الموضوع الثاني

التمرين الاول: التفسير الهندسي لكل عبارة

(1) لا يمكن رسم المنحنى (C_f) من دون رفع القلم عند $x = x_0$.

(2) المستقيم $y = x + 1$: (Δ) م.م.م لـ (C_f) بجوار $-\infty$

(3) المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ في نقطة فاصلتها x_0

(4) النقطة $(a, f(a))$ نقطة انعطاف

التمرين الثاني: (1) دراسة استمرارية الدالة f عند $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x + 1 = 2$$

$$f(0) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 1 = 1$$

ومنه f غير مستمرة عند $x = 0$

(2) قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ من اليمين:}$$

$$\text{من اليسار: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = 0 \text{ ومنه } f \text{ غير ق.إ. عند } x = 0$$

ت. ه. : النقطة $(0, f(0))$ نقطة زاوية و (C_f) يقبل نصف مماس على يمين

ويسار x_0 ميل كل منها 1 و 0

$$\text{النهايات: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

اتجاه التغير:

$$\text{المشتق: } f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

إشارة المشتق واتجاه التغير:

لما $x \in [0, +\infty[$ دالة متزايدة تماما.

لما $x \in]-\infty, 0]$ دالة متناقصة تماما.

التمرين الثالث: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $-2e^{2x} + 2e^x = 0$

$$\text{بوضع: } e^{2x} = t^2, e^x = t$$

$$\text{تصبح المعادلة من الشكل: } -t^2 + 2t = 0 \dots (1)$$

$$\Delta = 4 \text{ للمعادلة (1) حلان هما } t = 0 \text{ او } t = 2$$

و بالتالي لما: $t = 1 = e^x$ مرفوض ولما $t = 2 = e^x$ أي $x = \ln 2$

ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو $S = \{\ln 2\}$

عين قيم x في كل حالة:

فواصل نقاط نقاط المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

$$\text{معناه حل المعادلة: } f(x) = 0 \text{ أي } (e^x + 1)(3 - e^x) = 0$$

$$= 0 \text{ أي } (e^x + 1) = 0 \text{ أي } e^x = -1 \text{ مرفوض}$$

$$\text{او } (3 - e^x) = 0 \text{ أي } e^x = 3 \text{ ومنه } x = \ln 3$$

اذن توجد نقطة وحيدة ذات الاحداثيات $(\ln 3, 0)$

للدالة f قيم حدية محلية: معناه حلول المعادلة $f'(x) = 0$

$$\text{لدينا: } -2e^{2x} + 2e^x = 0 \text{ أي } f'(x) = 0 \text{ أي } x = \ln 2$$

ومنه توجد قيمة حدية وحيدة $(\ln 2, f(\ln 2))$ أي $(\ln 2, 2 \ln 2)$

الدالة f متزايدة تماما و متناقصة تماما.

ندرس إشارة $f'(x)$.

لما $x \in [\ln 2, +\infty[$ فان $f'(x) < 0$ ومنه f' دالة متناقصة

لما $x \in]-\infty, \ln 2[$ فان $f'(x) > 0$ ومنه f' دالة متزايدة تماما

(3) نقاط نقاط (C_g) مع محور الفواصل

$$\text{معناه حل المعادلة } g(x) = -2[\ln(x+1)]^2 + 2\ln(x+1) = 0$$

$$\text{بوضع: } \ln(x+1) = r, [\ln(x+1)]^2 = r^2$$

$$\text{تصبح المعادلة من الشكل: } -r^2 + r + 2 = 0 \dots (1)$$

حلاها هما $r = 0$ او $r = 2$

لما: $r = 0 = \ln(x+1)$ أي $x+1=1$ ومنه $x = e^{-1}$

$$\text{ولما } r = 2 = \ln(x+1) \text{ أي } x+1 = e^2 \text{ ومنه } x = e^2 - 1$$

ومنه فواصل نقاط نقاط (C_g) مع محور الفواصل $S = \{e^{-1}, e^2 - 1\}$.

التمرين الرابع:

$$(1) \text{ النهايات: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$(2) \text{ بين أنه من أجل كل } x \text{ من } D \text{ ان: } f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x - 1)^2}$$

(3) اتجاه تغير الدالة f : $f'(x) > 0$ أي f دالة متزايدة تماما على D_f .

(4) بين أن الدالة f دالة فردية: نثبت ان $f(-x) = -f(x)$

$$(5) \text{ استنتاج كل من } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

باستعمال العلاقة السابقة: $f(-x) = -f(x)$ نجد ان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

(6) بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in]0, +\infty[$

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

(7) استنتاج حلا آخر للمعادلة $f(x) = 0$ ينتمي الى $]-\infty, 0[$

باستعمال العلاقة السابقة: $f(-x) = -f(x)$ نجد ان: $f(-\alpha) = -f(\alpha) = 0$

والمجالان $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$ متناظران بالنسبة للمبدأ اذن الحل هو $-\alpha$

(8) المستقيم $(d): y = x - 1$ ذو المعادلة $(d): y = x - 1$ م.م.م لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\text{بعد الحساب نجد: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$$

(9) استنتاج ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته

نظير المستقيم $(d): y = x - 1$ بالنسبة للمبدأ هو المستقيم $(\Delta): y = x + 1$

ومنه $(\Delta): y = x + 1$ م.م.م لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

(10) المناقشة البيانية: لما $m \in]-\infty, 0]$ للمعادلة حل وحيد سالب

: لما $m \in [0, 2]$ لا يوجد حلول. : لما $m \in [2, +\infty[$ للمعادلة حل وحيد موجب