الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — **مديرية التربية لولاية ورقلة**
امتحان تجريبي شهادة بكالوريا التعليم الثانوي — **ثانويات تقرت**
الشعبة : علوم تجريبية — **دورة ماي 2016**

اختبار في مادة : الرياضيات — **المدة : 03 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

لتكن النقطة $A(-1;2;3)$ والمستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 9+4t \\ y = 6+t; t \in \mathbb{R} \\ z = 2+2t \end{cases}$.

1 ـ أ)ـ أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (P) العمودي على (Δ) والمار من A .

ب) ـ تحقق من أن النقطة $B(-3;3;-4)$ تنتمي إلى (Δ) .

جـ)ـ أحسب المسافة d_B بعد النقطة B عن المستوي (P) .

2ـ عبر عن المسافة d بين A والمستقيم (Δ) بدلالة d_B والمسافة AB ثم استنتج قيمة d .

3ـ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) . عبر عن AM^2 بدلالة t ثم أوجد قيمة d بطريقة ثانية.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$

1- احسب u_1, u_2

2- ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \prec u_n \prec 4$

ب) بين أن (u_n) متزايدة , مادا تستنتج ؟

3.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim u_n$

2) 4- احسب بدلالة n كلا من : $S_n = v_0 + v_1 + ...v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times .....u_n$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(z)$ ذو المتغير المركب z حيث :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

1) أحسب $P(2)$ ثم أوجد تحليلا لـ $P(z)$.

2) حل في C المعادلة $P(z) = 0$ ، نسمي z_1 و z_2 الحلين المختلفين عن 2 حيث z_1 جزؤه التخيلي موجب

3) أ/ تحقق أن : $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$ ثم أكتب كل من z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

4) في المستوي المركب المباشر المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة $2cm$)
نعتبر النقط : A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : 2 ، z_1 و z_2 ولتكن I منتصف $[AB]$

أ)ـ علم النقط A ، B ، C و I .

ب)ـ ما طبيعة المثلث OAB واستنتج قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OI})$.

جـ)ـ احسب z_I لاحقة I ثم اكتب z_I على الشكل الأسي .

د)ـ باستعمال النتائج السابقة أوجد القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

التمرين الرابع : (07نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـــ : $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$ و (c) تمثيلها في معلم متعامد ومتجانس

1. ا/ أتبث أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D)

2. أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x , $f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y=-x+\ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D')

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

4. ارسم (D) و (D') و (C)

5. نضع : $I=\int_2^3[f(x)-x]\,dx$

1- فسر هندسيا العدد I

2- بين أنه من اجل كل x من $[0,+\infty[$, $\ln(1+x)\le x$

3- أستنتج أن $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$ واعط حصرا للعدد I سعته 0.02

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

f دالة عددية معرفة على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

1) بين أنه إذا كان $x\succ 1$ فإن $f(x)\succ 1$.

2) نعرف المتتالية (u_n) بـ: $u_0=2$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ/ برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n\succ 1$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

جـ/ استنتج أن (u_n) متقاربة واستنتج نهايتها l .

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على N بـ : $v_n=\ln(\frac{u_n-1}{u_n})$ حيث ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبري.

أ/ أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ أكتب v_n بدلالة n واستنتج أن : $u_n=\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$.

4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : (E) ..... $z^3+2z^2-16=0$.

1) أثبت أن العدد 2 حل للمعادلة (E) ،ثم بين أنه يمكن كتابة (E) على الشكل $(z-2)(az^2+bz+c)=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب حسابها .

2) استنتج حلول المعادلة (E) ثم اكتبها على الشكل الأسي .

II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث الوحدة $1cm$.

1) انشئ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2-2i$ ، $z_B=2$ و $z_C=-2+2i$.

2) احسب z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع .أنشئ النقطة D.

3) لتكن E صورة D بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ولتكن F صورة D بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ/ أحسب z_E و z_F لاحقتي E و F .

ب/ أنشئ النقطتين E و F .

جـ/ تحقق من أن : $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث AEF .

التمرين الثالث : **(04 نقاط)**

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط: $A(0;4;1)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;-1;-2)$ و $D(7;-1;4)$.

1) أثبت أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2) ليكن المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;3)$.

أ/ بين أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) .

ب/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

جـ/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

د/ أوجد إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) .

3) نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+10z+14=0$.

أ/ أثبت أن (S) كرة مركزها $\Omega(1;2;-5)$ ونصف قطرها $R=4$.

ب/ تحقق أن Ω تنتمي إلى (Δ).

جـ/ برهن أن المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (c) يطلب إيجاد إحداثيات مركزها ω ونصف قطرها r .

التمرين الرابع : **(07 نقاط)**

I) لتكن الدالة g المعرفة على R بـ : $g(x)=e^x+2-x$.

- 1• أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف .
- 2• ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .
- 3• استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- 1• بين أنه من أجل كل x من R فإن : $f'(x)=e^{-x}g(x)$ واستنتج اتجاه تغير f .
- 2• احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
- 3•شكل جدول تغيرات الدالة f .
- 4• بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في R حلا وحيدا α حيث : $0\prec\alpha\prec\frac{1}{2}$.
- 5• أ/ أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ(C) و (D) .

- 6• احسب $f(-\frac{1}{2})$ و $f(-1)$ ثم أنشئ (C) و (D) .

III) لتكن الدالة F المعرفة على R بـ : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-xe^{-x}$.

- 1• أثبت أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على R.
- 2• نرمز بـ $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين : $x=\alpha$ و $x=1$ احسب $A(\alpha)$.

الموضوع الأول

التمرين الأول(4 نقاط)

$A(-1,2,3)$ و $(\Delta): \begin{cases} x = 9+4t \\ y = 6+t \ldots\ldots t \in \Re \\ z = 2+2t \end{cases}$

1)أ) إيجاد معادلة المستوي (P) : لدينا $(\Delta) \perp (P)$ ومنه $\vec{u}_{\Delta}(4;1;2)$ شعاع توجيه (Δ) ناظمي للمستوي (P)

معادلته: $4x+y+2z+d=0$

$A(-1,2,3) \in (P)$ أي: $-4+2+6+d=0$ أي: $d=-4$

$$(P): 4x+y+2z-4=0$$

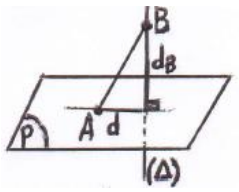
ب) التحقق أن $B(-3,3,-4)$ **تنتمي إلى** (Δ) :

$B \in (\Delta)$ ، وحيدة t ومنه: $\begin{cases} t=-3 \\ t=-3 \\ t=-3 \end{cases}$ $(\Delta): \begin{cases} -3=9+4t \\ 3=6+t \\ -4=2+2t \end{cases}$

ج)حساب المسافة d_B **بين** B و (P) :

لدينا: $d_B = \dfrac{|-12+3-8-4|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}} = \dfrac{21}{\sqrt{21}} = \dfrac{21\sqrt{21}}{21} = \sqrt{21}$

2)حساب المسافة d **بين** A و (Δ) :



$AB^2 = d^2 + d_B^2$

$d^2 = AB^2 - d_B^2$

$d = \sqrt{AB^2 - d_B^2}$

$AB = \sqrt{(-3+1)^2+(3-2)^2+(-4-3)^2} = \sqrt{54}$

نجد $d = \sqrt{54-21}$ $\quad d = \sqrt{33}$

3)التعبير عن AM^2 **بدلالة** t :

$M \in (\Delta)$ ومنه $M(9+4t;6+t;2+2t)$

$AM = \sqrt{(9+4t+1)^2+(6+t-2)^2+(2+2t-3)^2}$

$AM = \sqrt{(4t+10)^2+(t+4)^2+(2t-1)^2}$

$AM = \sqrt{16t^2+80t+100+t^2+8t+16+4t^2-4t+1}$

$AM = \sqrt{21t^2+84t+117}$

$AM^2 = 21t^2+84t+117$

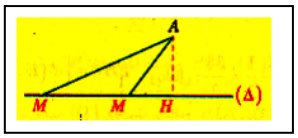
نضع : $f(t) = 21t^2+84t+117$

لندرس اتجاه تغير f : $f'(t) = 42t+84$

نجد $42t+84=0$ $\quad t=-2$

t	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$ ↘	33	↗ $+\infty$

من أجل $t=-2$ الطول AM أصغر ما يمكن



$AM^2 = f(-2) = 33$

ومنه : $AM = \sqrt{33}$ $\quad d = \sqrt{33}$

التمرين الثاني (4 نقاط)

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{4U_n} \end{cases}$$

1)حساب u_1, u_2 :

$U_1 = \sqrt{4U_0} = \sqrt{4} = 2$

$U_2 = \sqrt{4U_1} = \sqrt{8}$

2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \prec U_n \prec 4$

* من اجل $n=0$: $0 \prec U_0 = 1 \prec 4$ ($P(0)$ محققة)

*نفرض أن $0 \prec U_n \prec 4$ صحيحة و نبين أن: $0 \prec U_{n+1} \prec 4$

لدينا : $0 \prec U_n \prec 4$ ومنه: $0 \prec 4U_n \prec 16$

إذن: $\sqrt{0} \prec \sqrt{4U_n} \prec \sqrt{16}$

وبالتالي: $0 \prec U_{n+1} \prec 4$

إذن $p(n+1)$ **صحيحة**

*الاستنتاج : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \prec U_n \prec 4$

ب) إتجاه تغير المتتالية (U_n)

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{4U_n} - U_n$

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{(\sqrt{4U_n} - U_n)(\sqrt{4U_n} + U_n)}{\sqrt{4U_n} + U_n}$

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{4U_n - U_n^2}{\sqrt{4U_n} + U_n} = \dfrac{U_n(4-U_n)}{\sqrt{4U_n} + U_n}$

لدينا : $U_n \prec 4$ ومنه: $4 - U_n \succ 0$

و لدينا : $U_n \succ 0$ ومنه: $\sqrt{4U_n} + U_n \succ 0$

ومنه: $U_{n+1} - U_n \succ 0$ إذن : (U_n) **متزايدة**

الاستنتاج: (U_n) **متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة**

3) أ) إثبات أن (V_n) **متتالية هندسية:** $V_n = \ln(U_n) - \ln 4$

لدينا :

$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - \ln 4$

$V_{n+1} = \ln(\sqrt{4U_n}) - \ln 4$

$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a \quad a \succ 0$

$V_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(4U_n) - \ln 4$

$\ln ab = \ln a + \ln b \quad a \succ 0, b \succ 0$

$V_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln 4 + \dfrac{1}{2}\ln(U_n) - \ln 4$

$V_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(U_n) - \dfrac{1}{2}\ln 4$

$V_{n+1} = \dfrac{1}{2}[\ln(U_n) - \ln 4]$

$V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n$

$q = \dfrac{1}{2}$ هندسية أساسها (V_n)

و حدها الأول $V_0 = \ln(U_0) - \ln 4$ نجد $V_0 = -\ln 4$

ب) عبارة V_n :

$$V_n = V_0 \times q^n$$

0.25 $\boxed{V_n = (-\ln 4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

عبارة U_n :

$$V_n = \ln(U_n) - \ln 4$$

$\ln(U_n) = V_n + \ln 4$ **نجد** $U_n = e^{(v_n + \ln 4)}$

$$U_n = e^{v_n} \times e^{\ln 4}$$

0.25 $U_n = 4e^{-(\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 0.25

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 4}$ **(لأن :** $(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0)$ **و** $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$

4) حساب: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

$S_n = V_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ **نجد** $S_n = (-\ln 4)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$

$$S_n = (-2\ln 4)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

0.5

$$S_n = 4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

حساب: $P_n = U_0 \times U_1 \times ..... \times U_n$

لدينا: $U_n = e^{(v_n + \ln 4)}$

$$P_n = e^{v_0+\ln 4} \times e^{v_1+\ln 4} \times ..... \times e^{v_n+\ln 4}$$

$$P_n = e^{(v_0+v_1+.....v_n)+\underbrace{(\ln 4+\ln 4+...+\ln 4)}_{\text{ب (n+1)}}}$$

$P_n = e^{(S_n)+(n+1)\ln 4}$ 0.5

$$P_n = e^{4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]+(n+1)\ln 4}$$

التمرين الثالث(5نقاط)

$$P(Z) = Z^3 + 2(\sqrt{2}-1)Z^2 + 4(1-\sqrt{2})Z - 8$$

0.25 $P(2) = 0$ **(1**

$$P(Z) = (Z-2)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - 2aZ^2 - 2bZ - 2c$$

$$P(Z) = aZ^3 + (b-2a)Z^2 + (c-2b)Z - 2c$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=1 \\ b-2a = 2\sqrt{2}-2 \\ c-2b = 4-4\sqrt{2} \\ -2c = -8 \end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases} a=1 \\ b=2\sqrt{2} \\ c=4 \end{cases}$

0.5 $\boxed{P(Z) = (Z-2)(Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4)}$

2) $P(Z) = 0$

$Z = 2$ **أو** $Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4 = 0$

$\Delta = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i(2\sqrt{2})$

$Z = \frac{-2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ **أو** $Z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

0.5 $\boxed{Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$ **و** $\boxed{Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$

0.25 $Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2}$ **(3**

الشكل الأسي: $Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$|Z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$

0.5 $\boxed{Z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}}$ **إذن** $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ **و** $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

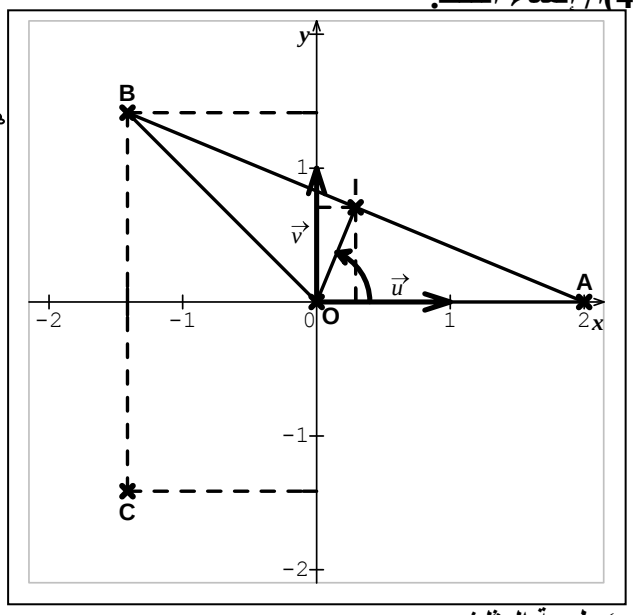
$Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$|Z_2| = \sqrt{4} = 2$

0.5 $\boxed{Z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ **إذن** $\alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ **و** $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

4)أ/ إنشاء النقط:

0.5



ب) طبيعة المثلث OAB **:**

لدينا : $|Z_A| = |Z_B| = 2$ **نجد** $OB = OA = 2$ 0.25

متقايس الضلعين OAB

قيس $(\vec{U};\vec{OI})$ **:** $\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{2e^{\frac{3\pi}{4}i}}{2} = e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ **نجد** $(\vec{OA};\vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$

0.5 $(\vec{U};\vec{OI}) = \frac{(\vec{OA};\vec{OB})}{2} = \frac{3\pi}{8}$

لأن $([OI])$ منصف الزاوية $(\vec{OA};\vec{OB})$

ج)حساب Z_I لاحقة I منتصف $[AB]$:

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$$

0.5

$$Z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

كتابة Z_I على الشكل الأسي:

$$|Z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|Z_I| = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\arg(Z_I) = (\vec{U};\vec{OI}) = \frac{3\pi}{8}$$

0.5

$$Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

استنتاج القيمة المضبوطة $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$:

$$Z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}} \end{cases}$$

0.5

$$\begin{cases} \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

التمرين الرابع:7نقاط

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) \quad ، \quad D_f = \Re$$

1) أ) إثبات أن : $f(x) = x + \ln(1+2e^{-2x})$ 0.5

لدينا:

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left(e^x(1+2e^{-2x})\right)$$

$$f(x) = \ln(e^x) + \ln(1+2e^{-2x})$$

$$f(x) = x + \ln(1+2e^{-2x})$$

ب) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: 0.25

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x + \ln(1+2e^{-2x})) = +\infty$$

إثبات أن $(D): y = x$ مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}(\ln(1+2e^{-2x})) = 0$$

0.5

ومنه (Δ)مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ج)دراسة الوضع النسبي (C_f) و (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x = \ln(1+2e^{-2x})$ 0.25

$1+2e^{-2x} \succ 1$ لأن $(2e^{-2x} \succ 0)$ ومنه $\ln(1+2e^{-2x}) \succ 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
إشارة الفرق	+
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)

2) أ) إثبات أن : $f(x) = -x + \ln(2+e^{2x})$

لدينا:

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left(e^{-x}(e^{2x}+2)\right)$$

$$f(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(2+e^{2x})$$

0.5

$$f(x) = -x + \ln(2+e^{2x})$$

ب) حساب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 0.25

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x + \ln(2+e^{2x})) = +\infty$$

إثبات أن $(D'): y = -x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+\ln 2)] = \lim_{x\to-\infty}(-x + \ln(2+e^{2x}) + x - \ln 2)$$

0.5

$$= \lim_{x\to-\infty}(\ln(2+e^{2x}) - \ln 2) = \ln 2 - \ln 2 = 0$$

ومنه (D')مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

ج)دراسة الوضع النسبي (C_f) و (D') :

ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-(-x+\ln 2) = \ln(2+e^{2x}) - \ln 2$$

$$f(x)-(-x+\ln 2) = \ln\left(\frac{2+e^{2x}}{2}\right)$$

0.25

$$f(x)-(-x+\ln 2) = \ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

$\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right) \succ 0$ ومنه $\left(\frac{1}{2}e^{2x} \succ 0\right)$ لأن $1+\frac{1}{2}e^{2x} \succ 1$

x	$-\infty$ $+\infty$
إشارة الفرق	+
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D')

3)حساب المشتق:

0.5

$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}-2)}{e^x + 2e^{-x}}$$

اشارة المشتق:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^{2x}-2$

لأن ($e^{-x}\succ 0$ و $e^{x}+2e^{-x}\succ 0$)

$e^{2x}-2\geq 0$ نجد $e^{2x}\geq 2$

$2x\geq \ln 2$ نجد $x\geq \frac{\ln 2}{2}$

وبنفس الطريقة: $e^{2x}-2\leq 0$ نجد $x\leq \frac{\ln 2}{2}$ 0.5

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f متناقصة على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$ ومتزايدة على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

2)جدول تغيرات f : 0.5

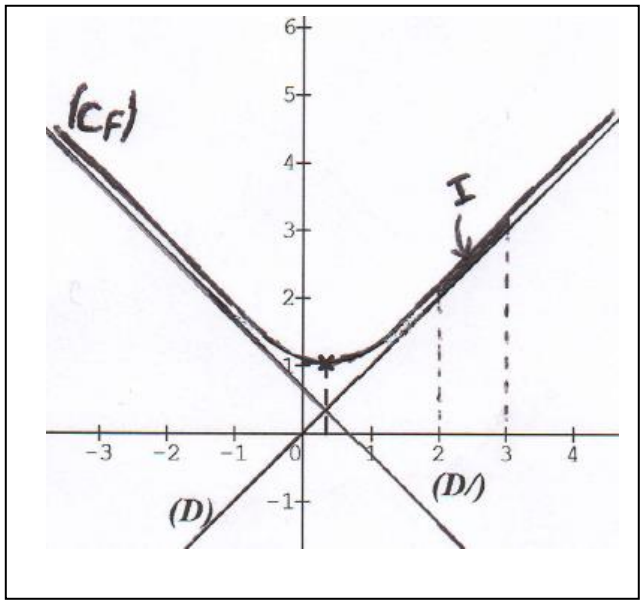
x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3\ln 2}{2}$	↗	$+\infty$

$f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$

$f(\frac{\ln 2}{2})=\frac{\ln 2}{2}+\ln(1+2e^{-\ln 2})=\frac{\ln 2}{2}+\ln 2$

$f(\frac{\ln 2}{2})=\frac{3\ln 2}{2}$

4) **رسم** : (D') ، (D) ، (C_f) 0.75



5)نضع $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx$:

1) المساحة المحددة بالمنحني (C_f) والمستقيمات 0.25
$x=2$ و $x=3$ و $(D):y=x$

2)**إثبات أنه من أجل** $x\in[0;+\infty[$: $\ln(1+x)\leq x$:

نضع : $g(x)=\ln(1+x)-x$

$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$

لدينا من أجل $x\geq 0$: $g'(x)\leq 0$

g متناقصة على المجال $[0;+\infty[$ (فهي تعكس الترتيب)

من أجل $x\geq 0$: $g(x)\leq g(0)$ ولدينا $g(0)=0$

$\ln(1+x)-x\leq 0$

0.5 $\ln(1+x)\leq x$

3)إستنتاج أن : $0\leq I\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

لدينا: $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx=\int_2^3 (x+\ln(1+2e^{-2x})-x)dx$

$I=\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx$

ومنه $1+2e^{-2x}\succ 1$ $\ln(1+2e^{-2x})\succ 0$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx\geq 0$ إذن $(1).....I\geq 0$

لدينا $2e^{-2x}\succ 0$ حسب السؤال السابق $\ln(1+2e^{-2x})\leq 2e^{-2x}$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

إذن $(2)....I\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

من (1) و (2) نجد 0.75 $0\leq I\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

إيجاد حصرا للعدد I **سعته 0,02** : $0\leq I\leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

لدينا: $\int_2^3 2e^{-2x}dx=\left[-e^{-2x}\right]_2^3=-e^{-6}+e^{-4}\approx 0.01583...$

ومنه: 0.25 $0\leq I\leq (e^{-4}-e^{-6})$

$0\leq I\leq 0,02$