على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول :(04.5 نقاط)

في الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس المباشر $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;1;0)$, $B(1;2;0)$, $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب

1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos A\hat{B}C$ و $\sin A\hat{B}C$.
ب) احسب مساحة المثلث ABC.
2) بين أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي(ABC)ثم استنتج معادلة ديكارتية له.
3) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمه : $v_{ABCD}=\frac{2m+5}{6}$.
4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء و التي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.
بين أنه من أجل عدد حقيقي m فإن (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .
5) عين قيمة m حتى يكون المستوي(ABC)مماسا لسطح الكرة (S_m).
6) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس (S_m).

التمرين الثاني :(04.5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z المركب التالية : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$
2) في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$, نعتبر النقط A , B , C و D لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $Z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $Z_D=\overline{Z_C}$.
بين أن النقط A , B , C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $Z_\Omega=3$ يطلب تعيين نصف قطرها .
3) لتكن النقطة E نضيرة النقطة D بالنسبة للمبدأ O .
أ) بين أن : $\frac{Z_C-Z_B}{Z_E-Z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .
ب) بين أنه يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E إلى النقطة C يطلب تعيين زاويته .
4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :
$Z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(Z+i\sqrt{3}\right)$.
أ) عين طبيعة S و عناصره المميزة.
ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $Z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$
حيث θ عدد حقيقي .
ت) عين طبيعة المجموعة (E') صورة (E) بالتحويل S و عناصرها الهندسية.

التمرين الثالث :(04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الارقام 0، 1،1،2 واربع كرات حمراء تحمل الارقام 1،1،2،2 نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الكيس

1) أحسب احتمال الحصول على :

أ ثلاث كرات من نفس اللون

ب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم

ج ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1.

أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي

ب)أحسب الامل الرياضياتي $E(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$

التمرين ارابع :(04 نقاط)

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على المجال $D=]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln(x)$.

1) أوجد نهايتي الدالة g على يمين 0 و عند $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج إشارة الدالة g .

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D=]0;+\infty[$ كالتالي : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$.

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) أ- أوجد نهايتي الدالة fعند $+\infty$ و على يمين 0. فسر هندسيا النتيجة الثانية .

ب- بين أن المستقيم (Δ)ذا المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) .

جـ - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ).

2) أ- تحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب – استنتج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$.

3) أثبت أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا αفي المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

4) ارسم المنحني (C) و المستقيمين (Δ) و (T).

الجزء الثالث: نضع من أجل x ينتمي إلى D : $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

1) احسب $h'(x)$. ما ذا تستنتج ؟

2) أوجد بالسنتيمترات المربعة S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C)وبالمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1\ ;\ x=e\ ;y=0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 10.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$

3) عين الأعداد الطبيعية n حيث: $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ و $10\prec n\leq 25$.

4) ليكن العدد A الذي يكتب على الشكل $\overline{xx02102}^{3}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب في النظام ذي الأساس 9 بالشكل $\overline{y67y}^{9}$

أ) عين x و y.

ب) أحسب A في النظام العشري .

ث) أكتب A في النظام ذي الأساس 7.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم و المتجانس المباشر $(O,\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و I التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq -2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$. حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد المركب z'.

1- أ) تحقق أن $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب)بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها المميزة .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا .

2- أ) تحقق أن : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$

ب)استنتج أن : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ و أن $\left(\vec{u},\overrightarrow{IM'}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)\equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A و نصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة F ذات اللاحقة $z_F=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

أ)بين أن النقطة F تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $\left(\vec{u},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة F' المرفقة بالنقطة F .

التمرين الثالث :(04 نقاط)

$(u_n)_{n\in N}$ المتتالية المعرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\langle u_n\langle\frac{1}{2}$

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{5^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 10 ويطلب حساب حدها الاول v_0

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$

التمرين الرابع :(08نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$.

نسمي (C_f) النحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب)بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8\prec\alpha\prec1.9$

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0)$ ، $f(3)$ ثم أرسم (Δ) ، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x: $f(x)=x+m$.

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1) أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب)أحسب I_1 .

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

ب)أحسب I_2 .

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

الموضوع الاول

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

1- (P) $\vec{AB}(2,-1,0)$ $\vec{BC}(2,0,1)$

3x $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=4$

0,25 $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=BA\cdot BC\cos\widehat{ABC}$

$\cos\widehat{ABC}=4/5$

2x $\cos^2 ABC+\sin^2 ABC=1$

0,25 ومنه $\sin ABC=3/5$

ب/ مساحة المثلث ABC

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin ABC$

0,5 $S_{ABC}=3/2$ (و.م)

ج/ $\vec{n}\cdot\vec{BC}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$ /2

3x $(ABC): x+2y-2z-5=0$

0,25 د/ تبيان أن الرباعي ABCD هرم /3

0,5 $D\notin(ABC)$

0,5 $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\,d(D,(ABC))$

0,5 $V_{ABCD}=\frac{2m+5}{6}$ (ح.م)

4/ $(S_m):(x-0)^2+(y-0)^2+(z-m)^2=9$

2x 0,25 (S_m) سطح كرة مركزها O وطول نصف قطرها $R=3$

5/ (S_m) مماسا لـ (ABC)

$d(O,(ABC))=R$

0,5 $m=2$ أو $\frac{2m+5}{3}=3$

قيمة m هي 2

6/ معادلة لـ (P) الموازي لـ (ABC) والمماس لـ (S_m)

$(P): x+2y-2z+d=0$

(S_2) مماس (ABC) الذي مركزها $D(0,0,2)$

$\frac{|-4+d|}{3}=3$ يعني (P) مماسا لـ (S_2)

0,5 $(d=-5)$ أو $(d=13)$ أي $-4+d=9$

معادلة لـ (P) هي

$x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني (04,5 نقاط)

0,5 1- $S=\{\sqrt{3}i,-\sqrt{3}i,3+2i\sqrt{3},3-2i\sqrt{3}\}$

2/ تتميم A,B,C,D تنتمي إلى الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(z_\Omega=3)$

0,5 $\Omega A=|z_A-z_\Omega|=|i\sqrt{3}-3|=2\sqrt{3}$

$\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$.

$\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$

(C) دائرة مركزها $\Omega(3)$ وطول نصف قطرها $R=2\sqrt{3}$

3/ (P) بين أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\pi/3}$

0,5 $z_E=-3+2i\sqrt{3}$ ومنه $z_D=3-2i\sqrt{3}$

$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

طبيعة المثلث BEC

0,25 لدينا: $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني $BC=BE$ و $(\vec{BE},\vec{BC})=-\frac{\pi}{3}$

المثلث BEC متقايس الأضلاع

ب/ $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\pi/3}$ يعني $z_C-z_B=e^{-i\pi/3}(z_E-z_B)$

0,5 يوجد دوران R مركزه B وزاويته $-\pi/3$ يحول النقطة E إلى C.

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ب/ الأمل الرياضي:

$$E(X)=\frac{84}{56}=1,5$$

التباين:

$$V(X)=\frac{15}{28}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=0,73$$

التمرين الرابع (07 نقاط)

الجزء الأول

1- $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$

2- من أجل كل x من $]0,+\infty[$;

$$g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$$

الدالة g متناقصة تماما على $]0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ ومتزايدة تماما على $[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$+\infty$

$$g(\sqrt{2}/2)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\approx 1,85$$

3- استنتاج إشارة $g(x)$

الدالة g موجبة تماما على $]0,+\infty[$

الجزء الثاني

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ / P.I

حامل محور التراتيب هو مستقيم مقارب لـ (C)

ب/ $\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0$

ج/ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

التمرين الثالث (04 نقاط)

عدد الحالات الممكنة:

$$C_8^3=56$$

1- $P_1=\frac{C_4^3+C_4^3}{56}=$

2- $P_2=\frac{C_4^3+C_3^3}{56}=$

3- $P_3=\frac{C_1^1\times C_4^1\times C_3^1}{56}=$

ب/ قيم المتغير العشوائي X هي:

$\{0,1,2,3\}$

ج) قانون احتمال المتغير العشوائي X

التمرين الرابع (07 نقاط)

1- طبيعة (S) وعناصره:

(S) تشابه مباشر مركزه ω حيث $\omega=-i\sqrt{3}$ وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2.

ب/ $z-3=2\sqrt{3}e^{i\theta}$ تعني $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$

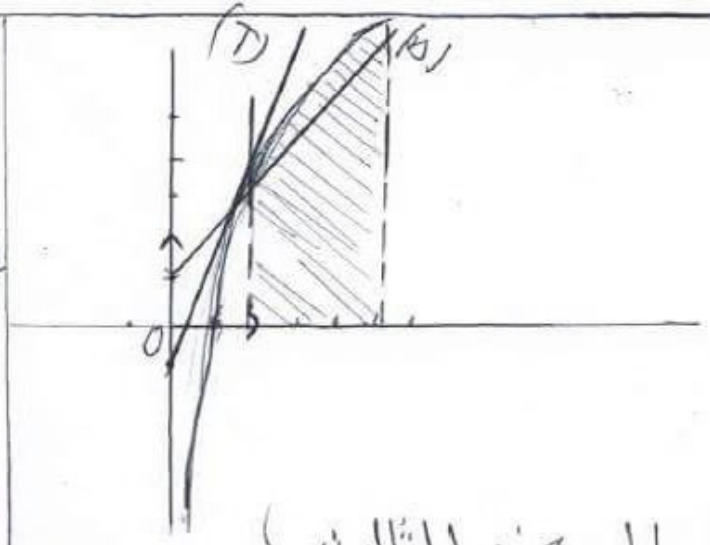
أي $|z-3|=2\sqrt{3}$ أي $AM=2\sqrt{3}$

مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها A وطول نصف قطرها $R=2\sqrt{3}$

ج/ طبيعة (E') صورة (E) بـ S وعناصرها.

صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي دائرة (C') مركزها A' صورة A بـ S وطول نصف قطرها $R'=2R=2.2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$$z_{A'}=6-3i\sqrt{3}$$



0,1

4/ الوضع النسبي لـ (C) و (Δ)

$f(x) - y = \frac{\ln(x)}{x}$

لما $0 < x < 1$ يكون (C) تحت (Δ)

0,5 لما $x > 1$ يكون (C) فوق (Δ)

لما $x = 1$ فإن $(C) \cap (\Delta) = \{(1, \frac{3}{2})\}$

2/ ب- لما $x \in]0, +\infty[$:

0,5 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ج- f متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

0,25

x	0	$+\infty$
f(x)	‖	$+\infty$
	$-\infty$	

0,25

د- معادلة المستقيم (T) مماسا لـ (C) عند A

0,5 $(T): y = 2x - \frac{1}{2}$

3/ $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من الحال $]\frac{1}{2}, 1[$

$f(1) = \frac{3}{2}$ و $f(\frac{1}{2}) = 1 - 2\ln 2 \simeq -0,39$

0,5 الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $[\frac{1}{2}, 1]$ و $f(\frac{1}{2}) \times f(1) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة

يوجد عدد حقيقي وحيد α من $]\frac{1}{2}, 1[$ بحيث: $f(\alpha) = 0$

/4

- الجزء الثالث -

$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 : x > 0$

0,25 1- حساب $h'(x)$ ماذا تستنتج ؟

0,25 h دالة قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ومن أجل كل x من D:

$h'(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x}\ln x$

$h'(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$

$h'(x) = f(x)$, $x > 0$ الإستنتاج

h دالة أصلية لـ f على D.

2-

$S = \int_1^e f(x)\,dx \times 4\ cm^2$

0,5 $S = 4\,[h(x)]_1^e\ cm^2$

$S = (2e^2 + 2e - 2)\ cm^2$

$S \simeq 18,21\ cm^2$

- انتهى -

التمرين الأول (04 نقاط)

1- دراسة بواقي قسمة 3^n على 10 حسب قيم العدد الطبيعي n.

$3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$

$3^2 \equiv 9[10]$ ، $3^3 \equiv 7[10]$

$3^4 \equiv 1[10]$

$3^{4k} \equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$

$3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

$(k \in \mathbb{N})$

2- $33 \equiv 3[10]$ ومنه $33^{16n+2} \equiv 3^{16n+2}[10]$

$109 \equiv 9[10]$ ومنه $109^{8n+1} \equiv 9^{8n+1}[10]$

$109^{8n+1} \equiv 9[10]$ و $33^{16n+2} \equiv 9[10]$

$2 \times 109^{8n+1} \equiv 8[10]$ و $11 \equiv 1[10]$ و

$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv (9 - 8 - 1)[10]$

$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0[10]$

3- إيجاد الأعداد الطبيعية n حيث $10 \leq n \leq 25$ و $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$

$n \equiv$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv$	0	2	8	6	$[10]$

قيم n من الشكل $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

$\frac{10}{4} \leq k \leq \frac{25}{4}$ ومنه $10 \leq n \leq 25$

أي $k \in \{3, 4, 5, 6\}$ وعليه قيم n هي:

$\{12, 16, 20, 24\}$

التمرين الثاني (04 نقاط)

1- تحقق أن: $z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$

$z' = \frac{iz + i - i(z+1+\frac{1}{i})}{z+2}$

$z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$

ب- النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM = BM$

$|z'| = \left|\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right|$

$|z'| = \frac{|i||z+1-i|}{|z+2|}$

$|z'| = \frac{|z-(-1+i)|}{|z-(-2)|}$ ومنه

$OM' = \frac{BM}{AM} = 1$ أي

M' تنتمي إلى الدائرة (C) مركزها "O" ونصف قطرها $R = 1$

ج- تعيين z حتى يكون z' عدد حقيقي

y و x عددين حقيقيين

$0 < x < 3$ و $0 < y < 9$

$\begin{cases} A = 2 + 1\times3^2 + 2\times3^3 + x\times3^4 + x\times3^5 + x\times3^6 \\ A = y + 7\times9 + 6\times9^2 + y\times9^3 \end{cases}$

$\begin{cases} A = 65 + 972x \\ A = 549 + 730y \end{cases}$ أي

$972x - 730y = 484$

إذا كان $x = 1$ فإن $y \notin \mathbb{N}$

إذا كان $x = 2$ فإن $y = 2$

$(x; y) = (2; 2)$

ب- $A = \overline{2009}$

ج- $A = \overline{5600}^7$

ج- طبيعة (E)

$\arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ تخيلي صرف معناه z'

و منه $\arg\left(\frac{i'(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\arg(i) + \arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \pi/2 + k\pi$

$\arg\left[\frac{z-(-1+i)}{z-(-2)}\right] = k\pi$

و عليه $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = k\pi$

$(E) = (AB]_- \{A, B\}$

ب- نتحقق أن $z' - i = \frac{1-i'}{z+2}$

$z' - i = \frac{i(z+1-i)}{z+2} - i$

$z' - i = \frac{1-i'}{z+2}$

ب- الاستنتاج

$IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM}$ و منه $|z'-i| = \left|\frac{1-i'}{z+2}\right|$ (*)

أي $IM' \times AM = \sqrt{2}$

(*) $\arg(z'-i) = \arg\left(\frac{1-i'}{z+2}\right)$

أي $(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) = -\frac{\pi}{4} - (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$

$(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv -\pi/4 \ [2\pi]$

ج-

M تنتمي الى دائرة (Γ) ذات المركز A و مقدارها نصف القطر 1

$AM = 1$

M' تنتمي الى مجموعة بطلب تعيينها:

$IM' = \sqrt{2}$ تعني $IM' \times AM = \sqrt{2}$

و عليه M' تنتمي الى دائرة مركزها I و $R = \sqrt{2}$

أ- بيان أن F تنتمي الى (Γ) و

نبين أن $(\vec{u}, \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$

تعني (Γ) تقطع F. $AF = 1$

$AF = |z_F - z_A| = 1$

و منه $F \in (\Gamma)$

$(\vec{u}, \overrightarrow{AF}) = \arg(z_F - z_A)$

$= \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$

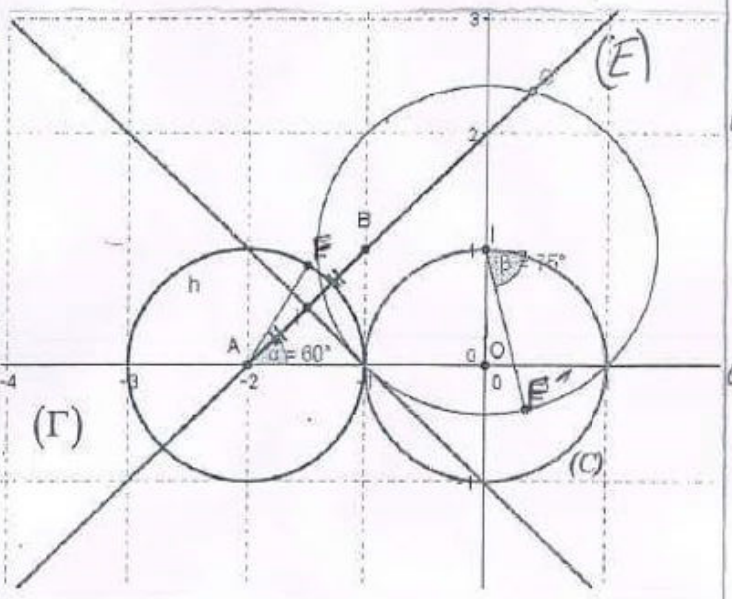
ب- انشاء النقطة F' حيث

$z_{F'} - i = \frac{1-i'}{z_F+2}$

لدينا من السؤال (2):

$(\vec{u}, \overrightarrow{IF'}) \equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$ و $FF' = \sqrt{2}$

أي $(\vec{u}, \overrightarrow{IF'}) \equiv -\frac{7\pi}{12} \ [2\pi]$



التمرين 1 الثالث (4 نقط)

$P(n): 0 < U_n < 1/2$ $n \in \mathbb{N}$ - 1

$P(0)$: $0 < U_0 < 1/2$ محققة.

نفرض $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبين صحة $P(n+1)$

لدينا: $n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < 1/2$

نضرب في 2:

$0 < 2U_n < 1$

ومنه

$1 < 2U_n + 1 < 2$ 0,5

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2U_n+1} < 1$

ومنه $0 < 1 - \frac{1}{2U_n+1} < \frac{1}{2}$

أي

$0 < U_{n+1} < 1$

$P(n+1)$ محققة وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) $U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{1}{2U_n+1} - U_n$ - P

$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - 2U_n^2}{2U_n+1}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$ 0,5

اتجاه تغير (U_n):

لدينا مما سبق من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$0 < U_n < \frac{1}{2}$ يعني $U_n > 0$ و $2U_n + 1 > 0$

أي $0 < 1 - 2U_n < 1$

وعليه $U_{n+1} - U_n > 0$ 0,5

(U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب/ بما أن (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى بالعدد $1/2$ فهي متقاربة.

متتالية (U_n).

$\lim U_{n+1} = \lim U_n = \ell \quad / \ell \in \mathbb{R}$.

$\ell = 1 - \frac{1}{2\ell+1}$

$2\ell^2 - \ell = 0$

$\ell = 1/2$ أو $\ell = 0$

بما أن (U_n) متزايدة تماما فإن $\ell = \frac{1}{2}$ 0,5

/3

$V_{n+1} = 10 V_n$ - P

(V_n) متتالية هندسية أساسها

$V_0 = -\frac{1}{3}$ وحدها الأول 10 0,5

$V_n = V_0 \times q^n = \left(-\frac{1}{3}\right) 10^n$ - ب 0,25

لدينا: $V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n - 1}$ أين

$U_n = \frac{V_n}{2V_n - 5^n} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)10^n}{2\left(-\frac{1}{3}\right)10^n - 5^n}$

$U_n = \frac{10^n}{2 \times 10^n + 3 \cdot 5^n} = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ 0,5 أي

$\lim U_n = \lim \frac{2^n}{2^n\left[2 + \frac{3}{2^n}\right]} = \frac{1}{2}$ 0,25

حساب بدلالة n المجموع S_n:

$S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \cdots + \frac{1}{U_n}$

$\frac{1}{U_n} = \frac{2^{n+1} + 3}{2^n} = 2 + \frac{3}{2^n}$

$S_n = \left(2 + \frac{3}{2^0}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^1}\right) + \cdots + \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)$ 0,5

$S_n = 2(n+1) + 3\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$

$S_n = 2(n+1) + 3\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{1/2 - 1}\right]$

$S_n = 2(n+1) - 6\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$

التمرين الرابع (08 نقاط)

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (0,5)

بين أن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x^2+1}{e^{-1} \times e^x} \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x^2}{e^{-1}e^x} - \frac{1}{e^{-1}e^x} \right]$$

$\to 0$ $\to 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5)

2) أ- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (0,5)

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$ (0,5)

ب- من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ (0,5)

وعليه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

(0,5)

ج- $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} -(x^2+1)e^{-x+1} = 0$ (0,5)

(Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $(+\infty)$

• الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$f(x) - y = -(x^2+1)e^{-x+1} < 0$

(C_f) يقع تحت (Δ) من أجل $x \in \mathbb{R}$ (0,5)

3- $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $]1,8; 1,9[$ (0,5)

$f(1,8) \simeq -0,11$ / $f(1,9) \simeq 0,03$ (0,5)

f مستمرة ورتيبة تماما على $[1,8; 1,9]$

و $f(1,8) \times f(1,9) < 0$ حسب مبرهنة

(0,5) القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا

وحيدا α من $]1,8; 1,9[$.

4- $(T): y = x - e$ (0,5)

5- f' دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$

$f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

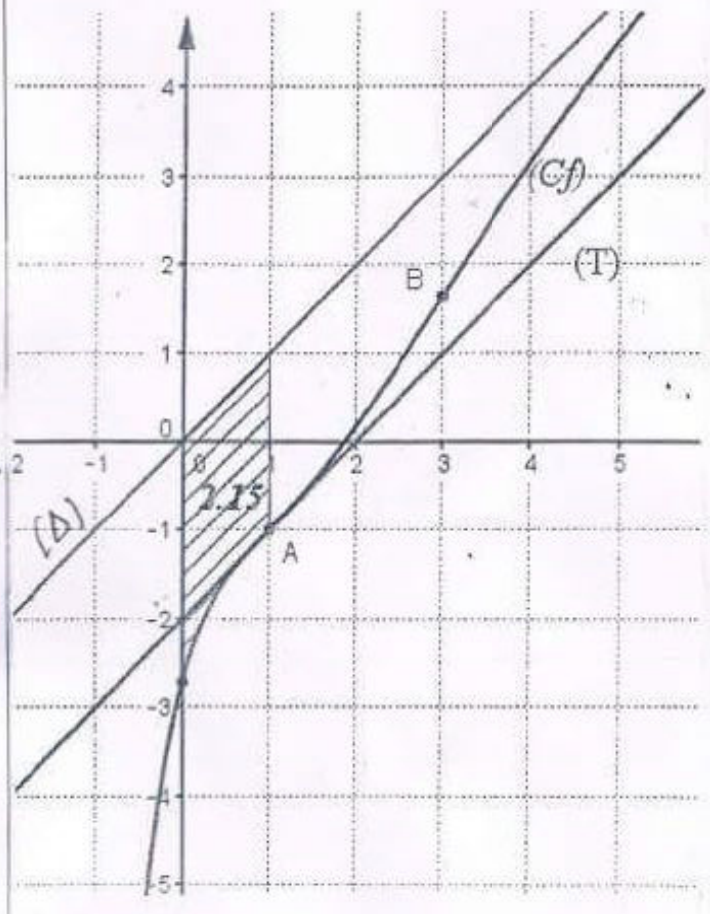
$f''(x) = 0$ تعني $(x=1)$ أو $(x=3)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	0	−	

(0,5) $f''(x)$ تنعدم عند كل من $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها مما يثبت

$A(1,-1)$ و $B(3, 3-10e^{-2})$ نقطتي انعطاف لـ (C_f).

6- $f(0) = -e$ ، $f(3) = 3 - 10e^{-2}$



7- المناقشة البيانية:

$(E) \dots f(x) = x + m$

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم معادلته $y = x + m$ 0,5 (T) الموازي لكل من (Δ) و

1. إذا كان $m \in]-\infty, -e[$ فإن (E) يقبل حلا وحيدا سالبا.
- إذا كان $m = -e$ فإن (E) يقبل حلا وحيدا معدوما.
- إذا كان $m \in]-e, +\infty[$ فإن (E) لا يقبل حلا.
- إذا كان $m \in [0, +\infty[$ فإن (E) يقبل حلا وحيدا موجبا.

II- الجزء

1) G الدالة G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

0,5 $G'(x) = x e^{-x+1}$

وعليه G دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x+1} dx$

0,25 $I_1 = [G(x)]_0^1$

$I_1 = -2 + e$

2) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$

0,5 نضع $u(x) = x^{n+1}$ ومنه $u'(x) = (n+1)x^n$

$v(x) = -e^{-x+1}$ ومنه $v'(x) = e^{-x+1}$

$I_{n+1} = [-x^{n+1} e^{-x+1}]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$

$I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n$

ب) حساب I_2

$I_2 = -1 + 2 I_1$

$I_2 = -1 + 2(e-2)$

0,25 $I_2 = 2e - 5$

3- $S = \int_0^1 [y - f(x)] dx$

$S = \int_0^1 (x^2 - 1) e^{-x+1} dx$

$S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx$

0,5 $S = I_2 + [-e^{-x+1}]_0^1$

$S = I_2 + (-1 + e)$

$S = 2e - 5 - 1 + e = (3e - 6) cm^2$

$S = (3e - 6) cm^2 = 2,15 cm^2$

1- الرسم