

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول : (20 نقطة)

التمرين الأول: (4 نقاط)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ؛ (الوحدة $2cm$).

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين 2 و 3 على الترتيب

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^2 - 4z + 6 = 0$.

2. نعتبر النقطتين M_1 و M_2 ذات اللاحقتين $Z_1 = 2 + i\sqrt{2}$ و $Z_2 = 2 - i\sqrt{2}$ على الترتيب

✓ أكتب $\frac{Z_1 - 3}{Z_1}$ على الشكل الجبري ثم استنتج أن المثلث OBM_1 قائم

3. بين أن النقط $0 ; B ; M_1$ و M_2 تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

✓ أرسم الدائرة (C) و عين النقطتين M_1 و M_2 على الرسم

II. نسمي f إلى التحويل النقطي الذي يرفق كل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات

اللاحقة z' حيث $z' = z^2 - 4z + 6$

1. تحقق أن $z' - 2 = (z - 2)^2$

2. إذا كانت النقطة M ذات اللاحقة z نقطة من الدائرة (Γ) التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$

بين أن النقطة M' ذات اللاحقة z' تنتمي إلى دائرة (Γ') يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

III. نسمي D النقطة ذات اللاحقة $Z_D = 2 + \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$ ونرمز بـ D' لصورة D بالتحويل f

1. بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (Γ)

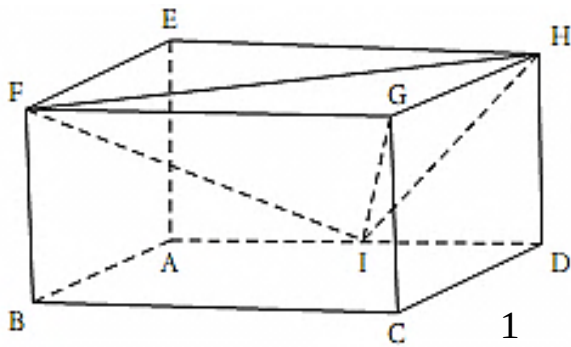
2. عين القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{AD'})$ ثم عين النقطة D' على الرسم

3. بين أن المثلث OAD' متقايس الأضلاع

التمرين الثاني: (4 نقاط)

1. نعتبر المعادلة $(E) \dots 24n - 13m = 1$ حيث n و m عدنان صحيحان
 أ. برر أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا
 ب. باستعمال خوارزمية اقليدس عين حل خاص للمعادلة (E)
 ت. حل المعادلة (E)
2. نفرض أن n و m عدنان طبيعيين حيث الثنائية $(n; m)$ حل للمعادلة (E)
 الهدف هو البحث عن $(PGCD(8^{24n} - 1, 8^{13m} - 1))$
 أ. برر أن 7 يقسم كلا من $8^{13m} - 1$ و $8^{24n} - 1$
 ب. بين ان $(8^{13m} - 1) - 8(8^{24n} - 1) = 7$
 ت. بين أن كل قاسم مشترك للعددين $8^{13m} - 1$ و $8^{24n} - 1$ يقسم 7
 ث. استنتج $(PGCD(8^{24n} - 1, 8^{13m} - 1))$
3. باستعمال النتيجة السابقة أحسب العدد d حيث $(d = 9 \times PGCD(2^{437} - 32, 2^{434} - 32))$
التمرين الثالث: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ حيث $AB = 1$, $AD = 2$, و $AE = 1$



نسمي I منتصف القطعة $[AD]$

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE})$

1. عين إحداثيات النقط H و G, F
2. نرمز بـ V لحجم رباعي الوجوه $GFHI$

أ. بين ان الحجم V لرباعي الوجوه $GFHI$ يساوي $\frac{1}{3}$

ب. بين ان المثلث FIH قائم في I

ت. بالاستعانة بالحجم V أحسب المسافة d بين النقطة G و المستوي (FIH)

3. بين ان الشعاع $\vec{n}(2; 1; -1)$ شعاع ناظمي للمستوي (FIH)
4. استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (FIH)
5. أحسب بطريقة أخرى المسافة d بين النقطة G و المستوي (FIH)
6. (Δ) المستقيم يشمل النقطة G وعمودي على المستوي (FIH)
 أ. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)
 ب. عين إحداثيات النقطة K نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (FIH)
7. عين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون النقطة K مرجح للجملة $\{(F.1), (I.\alpha), (H.\beta)\}$

8. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\|\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MH}\| = 6$
- أ. بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها
- ب. بين أن المستوي (FIH) يقطع سطح الكرة (S) وفق الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها
- التمرين الرابع: (8 نقاط)**

f الدالة المعرفة بـ $f(0) = 2$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f(x) = \frac{-1+2\ln x}{\ln x}$

(C) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الأطوال $2cm$

1. ادرس استمرارية الدالة f عند $x = 0$ على اليمين
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 0$ على اليمين ثم فسر هندسيا النتيجة
3. عين نهاية الدالة f عند 1 و عند $+\infty$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟
4. ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول التغيرات.
5. بين أن النقطة A ذات الفاصلة $x_0 = e^{-2}$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C) ؟
6. بين أن المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة يطلب تعيين فاصلتها
7. نبحث عن المماسات (T_0) للمنحنى (C) التي تشمل المبدأ O .
ليكن a عدد حقيقي من $]0;1[\cup]1;+\infty[$
- أ. بين أن المماس (T_a) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة a يشمل المبدأ إذا وفقط إذا كان $f(a) - af'(a) = 0$
- ب. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = f(x) - xf'(x)$
- ✓ بين أنه المعادلتين $g(x) = 0$ و $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ متكافئتان على $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
- ✓ استنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين يطلب تعيينهما
- ت. استنتج من الأسئلة السابقة أنه يوجد مماسين (T) و (T') للمنحنى (C) يشملان المبدأ O يطلب كتابة معادلة لكل منهما
8. ارسم المماسين (T) و (T') ثم المنحنى (C) .
9. بقراءة بيانية ، عين عدد حلول المعادلة $(mx - 2) \ln x + 1 = 0$ حسب قيم العدد الحقيقي المعطى m
10. نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{f(x) - \frac{1}{x}}{e^x}$
- أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $h'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$
- ب. استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها
- ت. استنتج إشارة الدالة h
- ث. أحسب D مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ و $x = e$ و $x = e^2$

الموضوع الثاني : (20 نقطة)

التمرين الأول: (4 نقاط)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ؛ (الوحدة $1cm$).

نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق $Z_A = 2$ ، $Z_B = 2 + 3i$ و $Z_C = 3i$ على الترتيب

1. لتكن النقطة E نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة A بين أن لاحقة E هي $Z_E = 4 - 3i$
2. عين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون النقطة F ذات اللاحقة $Z_F = 6 - i$ مرجح للجملة $\{(O, \alpha), (A, \beta), (B, 1)\}$

3. نسمي S التشابه المباشر الذي يحول النقطة O إلى النقطة E ويحول النقطة A إلى النقطة F
أ. عين الكتابة المركبة للتحويل S

ب. عين مركز وزاوية ونسبة التشابه المباشر S

ت. عين لاحقة النقطة G صورة النقطة F بالتشابه المباشر S

4. عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق

$$\|6\vec{MO} - 10\vec{MA} + \vec{MC}\| = \frac{3}{2} \|\vec{ME} + \vec{MC}\|$$

✓ عين صورة المجموعة (Γ) بالتحويل S

التمرين الثاني: (4 نقاط)

نعتبر المعادلة $(E) \dots x^2 - 2y^2 = 1$ حيث x و y عدنان طبيعيان غير معدومين

1. في هذا السؤال نفرض ان الثنائية (y_0, x_0) حل للمعادلة (E)

أ. بين انه يوجد عدد طبيعي k بحيث $x_0 = 2k + 1$

ب. استنتج حل للمعادلة (E) من اجل $1 \leq x_0 \leq 4$

2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بـ a_n و b_n الى الاعداد الطبيعية غير المعدومة

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$
 التي تحقق

أ. أحسب a_1 و b_1

ب. أكتب كلا من a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n

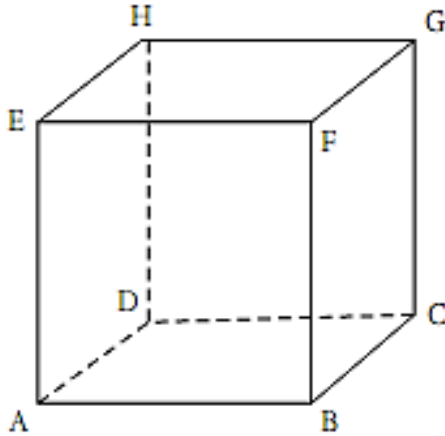
ت. يرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n الثنائية (a_n, b_n) حل للمعادلة (E)

$$\frac{1}{a_n + b_n\sqrt{2}} = a_n - b_n\sqrt{2} \quad \text{ثم أستنتج ان} \quad (3 - 2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

ج. استنتج عبارة a_n و b_n بدلالة n

التمرين الثالث: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء مكعبا $ABCDEFGH$ طول حرفه 1



نرمز بـ K الى مرجح للجملة $\{(F, 2), (D, 1)\}$

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

الجزء الاول:

1. عين إحداثيات النقطة K
2. بين ان المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان
3. أحسب المسافة EK

الجزء الثاني:

لتكن M نقطة من القطعة $[HG]$ المستقيمة نضع $m = HM$ حيث m عدد حقيقي

ينتمي الى المجال $[0; 1]$

1. بين انه من اجل كل عدد حقيقي m من $[0; 1]$ الحجم V لرباعي الوجوه $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$
 2. بين ان المعادلة $(-1+m)x + y - mz = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (MFD)
 3. نرمز بـ d_m للمسافة بين النقطة E والمستوي (MFD)
- أ. بين انه من اجل كل عدد حقيقي m من $[0; 1]$ $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$
- ب. عين وضعية M النقطة على القطعة $[HG]$ حتى تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن
- ت. أحسب المسافة d_m الموافقة لهذه الوضعية
- ث. عندما تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن استنتج المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (MFD)

التمرين الرابع: (8 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 0$ على اليمين ثم فسر هندسيا النتيجة
2. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم فسر هندسيا النتيجة .
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على $[0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

4. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = f'(x) - 1$

أ. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$

ب. استنتج أنه يوجد مماس واحد (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة α معادلة:

$$y = x + f(\alpha) - \alpha$$

ت. بين أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1-2\alpha}$ ثم استنتج أن $\frac{1}{7} \leq f(\alpha) \leq \frac{1}{\sqrt{2}e}$

5. أرسم المماس (T) ثم المنحني (C) .

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

7. علما أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x \geq x$

أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f(x) \leq e^{\frac{-x}{2}}$

8. ليكن λ عدد حقيقي حيث $\lambda \geq 1$ نضع $S(\lambda) = \int_1^\lambda f(x)dx$

أ. أعط تفسيراً هندسياً للعدد الحقيقي $S(\lambda)$

ب. بين أنه من أجل كل $\lambda \geq 1$: $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

9. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها العام

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n$$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

ب. أحسب نهاية المتتالية (u_n) ماذا تستنتج .

10. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $I_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$

أ. بين أن $I_n = S(n)$.

ب. ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n)

ت. هل المتتالية (I_n) متقاربة ؟