

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد، متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط B, A و C التي لواحتها على الترتيب $z_C = 4$ و $z_B = \sqrt{3} - i$ ، $z_A = 1 + i$.

1) أ) أكتب الأعداد z_B, z_A و $\frac{z_A}{z_B}$ على شكل المثلثي، ثم استنتج الشكل الأسّي.

ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على شكله الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

2) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{3}i)$ ، أكتب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8$.

3) ليكن التحويل التقطي S الذي يرفق بكل النقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} z$.

- حدد طبيعة التحويل التقطي S و عناصره المميزة.

4) أ) أوجد المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق: $z = z_c + 2e^{i\theta}$ لما θ تمشح $\mathbb{R}$.

ب) أوجد المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق: $\text{Arg}(z - z_c) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

5) أوجد صورة (Γ_1) بالتحويل التقطي S ، استنتج مساحتها.

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط $A(3; 4; 0)$ ، $B(0; 5; 0)$ ، $C(0; 0; 5)$ ، $D(-2; -6; 5)$ ، $E(-4; 0; -3)$ و الشعاع $\vec{n}(1; 3; 3)$.

1. بين أن النقط A, B, C تعين مستو (ABC) ، تأكد أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي له ثم اكتب معادلة ديكرتية له.

2. أ / برهن أن المثلث AOB متساوي الساقين.

ب / عين إحداثيي النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ، ثم بين أن $OI = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

ج / بين أن المستقيم (OC) عمودي على المستوي (AOB) .

د / استنتج حجم رباعي الوجوه $OABC$.

3. احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

4. أ / جد تمثيلًا وسيطيا للمستقيم (DE) .

ب/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة المستقيمة [DE] .

ج / تحقق ان النقطة $F\left(-1;1;\frac{7}{2}\right)$ تنتمي للمستوي (Q)

د / استنتج المسافة بين النقطة F والمستقيم (DE) .

التمرين الثالث : (3.5 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx$

(1) أحسب u_0 ثم اثبت مستعملا مبدأ الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$

(2) أحسب u_n بدلالة n .

(3) برهن أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(4) أ) أحسب بدلالة n الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي $n : S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أحسب بدلالة n المجموع S_n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

الجزء 1: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم

متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث الوحدة 2cm على محور الفواصل و 5cm على محور الترتيب

1. أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2. أ/بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1+e^x)$

ب/ أحسب نهاية f عند $+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. نعتبر على المجال $]-1; +\infty[$ الدالة g المعرفة ب : $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$

أ/ أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$

ب/ أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(t)$ من أجل t موجب تماما.

4. أ/بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

ب/ استنتج أن f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ أنشئ (C_f)

الجزء الثاني: نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $t : \frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3. استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد ب (C_f) والمستقيمات التي معادلتهما $x=0, x=\ln 4, y=0$.

الموضوع الثاني:

التمرين الاول : (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم ، متعامد ، متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1; -3; 3)$ ، $B(-3; -2; 1)$ و $C(1; 5; 6)$

$$(d): \begin{cases} x = -k \\ y = -4k + 1 \\ z = -2k + 4 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\Delta): \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. بين أن المستقيمين (d) و (Δ) يتقطعان في نقطة D يطلب تعيين إحداثياتها .
2. تحقق أن : $B \in (\Delta)$ و $C \in (d)$ ، ثم بين أن المثلث BCD قائم .
3. أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) المعروف بالمستقيمين (d) و (Δ) .
4. تحقق أن المستوي $(Q): -4x + y - 1 = 0$ معرف بالمستقيم (d) و النقطة A
5. ليكن α عدد حقيقي و G نقطة من الفضاء .
أ) عين شرطا على العدد الحقيقي α بحيث تكون النقطة G مرجح للجملية المثقلة $\{(B, \alpha); (C, -2\alpha); (D, 5)\}$.
ب) أوجد إحداثيات النقطة G من أجل $\alpha = -1$.
6. عين (S) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $GM^2 = 36$.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

- I (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ، $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ ،
2) نضع : $z_A = 2i$ ، $z_B = -\sqrt{3} + i$ ، $z_C = -\sqrt{3} - i$. أكتب الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .
3) بين ان العدد ، z_B^{2016} حقيقي
- II (2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$
نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب z_A ، z_B و z_C
1) أحسب قيسا للزاوية $(\vec{OA}; \vec{OB})$ ثم إستنتج طبيعة المثلث OAB .
2) أثبت أن الرباعي OABC معين يطلب حساب مساحته .
3) أ) حدد زاوية الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة B و يحول النقطة O الى النقطة A
ب) أكتب الصيغة المركبة للتحاكي $\mathcal{O}$ الذي مركزه B ونسبته 2
4) حدد الطبيعة و العناصر المميزة لتحويل $S = \mathcal{R} \circ \mathcal{O}$ ثم أعط الصيغة المركبة له .
5) عين طبيعة صورة المعين OABC بالتحويل S . ثم أحسب مساحته .

التمرين الثالث : (4 نقاط)

(U_n) و (V_n) متاليتان معرفتان كما يلي : $U_0 = 1$ و $V_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5} , \quad U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}$$

1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $W_n = U_n - V_n$.

أ) أثبت أن المتتالية (W_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

- ب) أكتب W_n بدلالة n ، ثم عين نهايتها .
 2) غير عن : $U_{n+1} - U_n$ و $V_{n+1} - V_n$ بدلالة W_n .
 - استنتج اتجاه تغير المتتاليتين (U_n) و (V_n) ، ثم بين أنهما متجاورتان .
 3) من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة بـ : $t_n = 3U_n + 10V_n$
 أ) بين أن المتتالية (t_n) ثابتة ، ثم احسب نهايتها .
 ب) عين نهاية المتتاليتين (U_n) و (V_n) .

التمرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء 01:

- نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x) = \alpha x + \frac{\beta}{1+e^x}$ حيث $\alpha ; \beta$ عدنان حقيقيان ثابتان .
 أحسب $F'(x)$ ثم عين العددين الحقيقيين $\alpha ; \beta$ حيث $F(1) = \frac{e}{1+e}$ و $F'(0) = \frac{5}{4}$

الجزء 02: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{1+e^x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 4cm .

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. أ) بين أن المستقيمين المرفين بـ $(\Delta_1): y = x$ و $(\Delta_2): y = x - 1$ مستقيمان مقاربان للمنحني (C_f)
 ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) .
4. تحقق أن $f(-x) + f(x) = -1$ ، ماذا تستنتج؟
5. ليكن (T) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 . اكتب معادلة (T) .
6. أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 0,5$
 ب) تحقق أن $1 + e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

7. أنشئ كلاً من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (T) و (C_f) . (تقبل ان المنحني (C_f) يقبل $(0; -\frac{1}{2})$ كنقطة إنعطاف)

8. ناقش بيانيا وذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $m = \frac{1}{1+e^x}$

9. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي : $u_n = \int_{\alpha}^n [x - f(x)] dx$.

أ) أعط تفسيراً هندسياً لـ u_n

ب) تحقق أن $x - f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

ج) احسب u_n بدلالة n

د) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -(\alpha + \ln \alpha)$

بكالوريا جوان 2016

بالتوفيق