

التمرين الأول: (05 ن)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(P) معرف بالمعادلة الديكارتية حيث $x+2y+2z+2=0$

(S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء والتي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$

1- بين ان (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r .

2- $B(3; 2; 0)$ نقطة من الفضاء .

- تحقق ان B تنتمي الى (S).

- اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) المماس ل (S) في النقطة B.

3- بين ان (P) و (Q) متعامدان

4- (D) المستقيم المار من $C(1; 1; 1)$ والموازي للمستويين (P) و (Q).

- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

- احسب البعد بين النقطة Ω والمستقيم (D).

بين ان (D) يقطع (S) في نقطتين . (تحديدهما غير مطلوب)

التمرين الثاني: (06 ن)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I/ من اجل كل عدد مركب z نضع : $p(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

1- احسب $p(-2\sqrt{2})$.

2- بين ان $p(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$ حيث $a; b$ عدنان حقيقيان يطلب تحديدهما.

3- حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $p(z) = 0$.

II/ نضع النقط $A; B; C$ التي لواحقها على الترتيب $Z_A = 2 + 2i, Z_B = 2 - 2i, Z_C = -2\sqrt{2}i$

1- علم النقط $A; B; C$.

2- احسب طويلة لواحق النقط $A; B; C$ ثم بين انها تنتمي الى نفس الدائرة (Γ) يطلب تحديد عناصرها المميزة

3- احسب عمدة العدد المركب Z_A وعمدة العدد المركب Z_B . ثم اثبت ان $(\vec{OB}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{2}$

4- عين z_D لاحقة النقطة D حيث O منتصف [BD]

5- بين ان $\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ثم فسر النتيجة

6- لتكن (E') مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث : $z = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$

(أ) تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E') .

(ب) عين طبيعة المجموعة (E') ثم أنشئها.

التمرين الثالث: (09 ن)

المنحنى البياني (C_h) للدالة h المعرفة على

$$h(x) = \frac{-3 + 3\ln(x)}{x^3} \quad \text{المجال }]0, +\infty[\quad \text{ب:}$$

(I) دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على

$$g(x) = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln(x)}{2x^2} \quad \text{المجال }]0, +\infty[\quad \text{بالشكل:}$$

وليكن (C_g) منحنىها البياني في مستوى منسوب إلى

معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين ان $g'(x) = h(x)$

(2) أدرس تغيرات الدالة g .

(3) بين أن المنحنى (C_g) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيينهما.

(4) أدرس وضعية المنحنى بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

(5) أنشئ (C_g).

(6) استنتج أنه مهما يكن $x \in]0, +\infty[$, $g(x) > 0$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل: $f(x) = x + \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x}$

وليكن (C_f) منحنىها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين ان $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

(ب) بين أنه مهما يكن $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(2) (أ) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

(ب) أدرس وضعية "المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)"

(ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ما ذا تستنتج بيانيا؟

(3) (أ) بين أنه توجد نقطة وحيدة B يكون عندها المماس للمنحنى (C_f) موازيا لـ (D) يطلب تعيين إحداثيها.

(ب) بين أن معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة B هي: $y = x + \frac{3}{2\sqrt{e}}$.

(4) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيمان (D) و (Δ)

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

تعطى $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ و $f(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{3+2e}{2\sqrt{e}}$ و $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

العلامة	عناصر الإجابة	محاو
	التمرين الأول: الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (P) معرف بالمعادلة الديكارتية حيث $x+2y+2z+2=0$ (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء والتي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ 1- اثبات ان (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r. لدينا $a = -2; b = -2; c = -4; d = -3$ ومنه $x_\Omega = -\frac{a}{2} = 1; y_\Omega = -\frac{b}{2} = 1; z_\Omega = -\frac{c}{2} = 2$ و $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + d = 9$ و $r = 3$ 2- $B(3; 2; 0)$ نقطة من الفضاء. $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$ - التحقق ان B تنتمي الى (S). لدينا $(3-1)^2 + (2-1)^2 + (0-2)^2 = 3$ محقق اي $B \in (S)$ - المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) المماس ل (S) في النقطة B. شعاعه الناظمي $\vec{\Omega B}(2, 1, -2)$ ومنه $B \in (Q)$ يعني ان $d = -8$ أي $(Q): 2x + y - 2z - 8 = 0$ 3- اثبات ان (P) و (Q) متعامدان $\vec{n}_{(P)}(1; 2; 2)$ و $\vec{\Omega B}(2, 1, -2)$ ومنه $\vec{\Omega B} \cdot \vec{n}_{(P)} = 2 + 2 - 4 = 0$ (P) و (Q) متعامدان 4- (D) المستقيم المار من $C(1; 1; 1)$ والموازي للمستويين (P) و (Q). - تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D). شعاع توجيهه $\vec{u}(a, b, c)$ يحقق $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{\Omega B} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \end{cases}$ ومنه نحل الجملة $\begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \end{cases}$ نأخذ c ثابت نجد $a = -b$ و $b = -2c$ اذن $\vec{u}(2, -2, 1)$ اذن $(D): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases} t \in \mathbb{R}$ - البعد بين النقطة Ω والمستقيم (D). و بوضع النقطة H مسقطها العمودي نجد $\vec{\Omega H}(2t; -2t; t-1)$ ومنه $\vec{\Omega H} \cdot \vec{u} = 0; 4t + 4t + t - 1 = 0; \left(t = \frac{1}{7}\right)$ أي $\vec{\Omega H}\left(\frac{2}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}\right)$ ومنه $\Omega H = \frac{\sqrt{44}}{7}$ اثبات ان (D) يقطع (S) في نقطتين. (تحديدهما غير مطلوب) $r = 3$ و $\Omega H = \frac{\sqrt{44}}{7} \approx 1$ اذن $\Omega H < r$ يعني ان (D) يقطع (S) في نقطتين.	

التمرين الثاني:

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I/ من اجل كل عدد مركب z نضع : $p(z) = z^3 + (2\sqrt{2} - 4)z^2 + (8 - 8\sqrt{2})z + 16\sqrt{2}$

1- حساب $p(-2\sqrt{2})$.

$$p(-2\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2})^3 + (2\sqrt{2} - 4)(-2\sqrt{2})^2 + (8 - 8\sqrt{2})(-2\sqrt{2}) + 16\sqrt{2}$$

$$p(-2\sqrt{2}) = -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 32 - 16\sqrt{2} + 32 + 16\sqrt{2} = 0$$

2- اثبات ان $p(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$ حيث a, b عدنان حقيقيان يطلب تحديدهما.

$$p(z) = z^3 + az^2 + bz + 2\sqrt{2}z^2 + 2\sqrt{2}az + b2\sqrt{2}$$

$$a = -4; b = 8 \text{ بالمطابقة نجد}$$

$$p(z) = z^3 + z^2(a + 2\sqrt{2}) + z(b + 2\sqrt{2}a) + b2\sqrt{2}$$

$$p(z) = (z + 2\sqrt{2})(z^2 - 4z + 8) \text{ ومنه}$$

3- حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $p(z) = 0$.

أي ان $(z + 2\sqrt{2})(z^2 - 4z + 8) = 0$ ومنه $z = -2\sqrt{2}$ و $z^2 - 4z + 8 = 0$ أي $Z = 2 + 2i$ و $Z = 2 - 2i$

II/ نضع النقط $C; B; A$ التي لواحقتها على الترتيب $Z_A = 2 + 2i$, $Z_B = 2 - 2i$ و $Z_C = -2\sqrt{2}i$

1- تعليم النقط $C; B; A$.

2- حساب طوليلة لواح النقط $C; B; A$ لدينا $|Z_A| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ و $|Z_B| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ و

$$|Z_C| = |-2\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$$

نستنتج ان النقط $C; B; A$ تنتمي الى نفس الدائرة (Γ) ذات المركز O ونصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$

3- عمدة العدد المركب Z_A :

$$\arg(Z_A) \begin{cases} \cos \theta = \sqrt{2}/2 \\ \sin \theta = \sqrt{2}/2 \end{cases} \theta = \frac{\pi}{4}$$

وعمدة العدد المركب Z_B :

$$\arg(Z_B) \begin{cases} \cos \theta = \sqrt{2}/2 \\ \sin \theta = -\sqrt{2}/2 \end{cases} \theta = -\frac{\pi}{4}$$

اثبات ان

$$(\vec{OB}; \vec{OA}) = (\vec{OI}; \vec{OA}) - (\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

4- عين z_D لاحقة النقطة D حيث O منتصف $[BD]$

$$z_D = -2 + 2i \text{ ومنه } \frac{z_D + z_B}{2} = 0 \text{ لدينا}$$

$$5- \text{ اثبات ان } \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \frac{2 - 2i - 2 - 2i}{-2 + 2i - 2 - 2i} = i = e^{i\pi/2} \text{ ومنه } \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = e^{i\pi/2} \text{ العدد تخيلي صرف موجب}$$

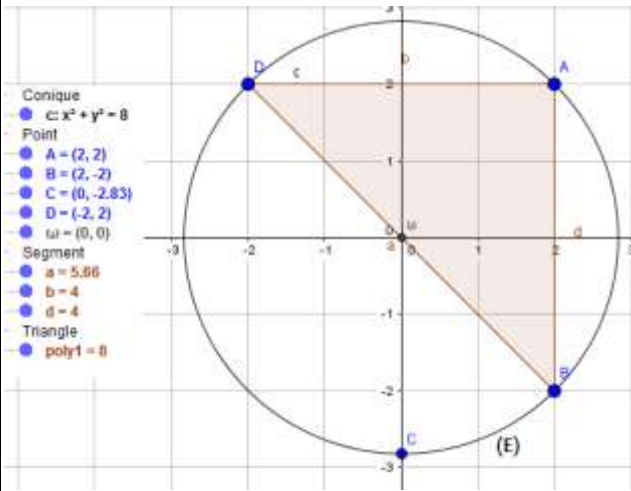
تفسير النتيجة المثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين

6- لتكن (E') مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث : $z = 2\sqrt{2}e^{i\theta}$.

(أ) التحقق أن النقطة D تنتمي إلى المجموعة (E') .

$$z_D = 2\sqrt{2}e^{i\theta} \text{ يعني ان } -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\theta} \text{ وبما ان } |z_D| = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2} \text{ فان } D \in (E')$$

(ب) المجموعة (E') هي دائرة مركزها O ونصف قطرها $2\sqrt{2}$ ثم أنشئها.



التمرين الثالث:

(I) g دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل: $g(x) = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln(x)}{2x^2}$ وليكن (C_g) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تغيرات الدالة g. نعلم ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln(x)}{2x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln(x)}{2x^2} = +\infty$$

المشتقة g دالة تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة

$$g'(x) = -\frac{3 \times 8x}{16x^4} - \left(\frac{3(2x^2)}{x} - (4x)3\ln(x) \right) \frac{1}{4x^4} = -\frac{6x}{4x^4} - (6x - 12x\ln(x)) \frac{1}{4x^4}$$

$$g'(x) = \frac{-6x - 6x + 12x \ln(x)}{4x^4} = \frac{-3 + 3 \ln(x)}{x^3} \text{ ومنه}$$

إشارة المشتقة $g'(x)=0$ يعني ان $-3+3\ln(x)=0$ ومنه $x=e$

$$g(e) = 1 + \frac{3}{4e^2} - \frac{3\ln(e)}{2e^2} = \text{جدول التغيرات}$$

(2) المنحني (C_g) يقبل مستقيمين مقارين

الاول هو $x=0$ لان $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ والثاني هو $y=1$ لان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

(3) وضعية المنحنى بالنسبة إلى المستقيم

المقارب الأفقى.

لدينا

$$g(x)-1=\frac{3}{4x^2}-\frac{3\ln(x)}{2x^2}=\frac{3-6\ln(x)}{4x^2}$$

ومنه $g(x)-1=0$ يعني $x=e^{\frac{1}{2}}$ أي

$$y=1 \text{ فوق } (C_g) \text{ المنحنى } x \in \left] 0; e^{\frac{1}{2}} \right[\quad \mathfrak{L}$$

ولما $x \in \left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty \right[$ المنحنى (C_g) تحت $y=1$

(4) أنشئ (C_q) .

(5) من المنحنى و مهما يكن $g(x) > 0, x \in]0, +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل: $f(x) = x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x}$

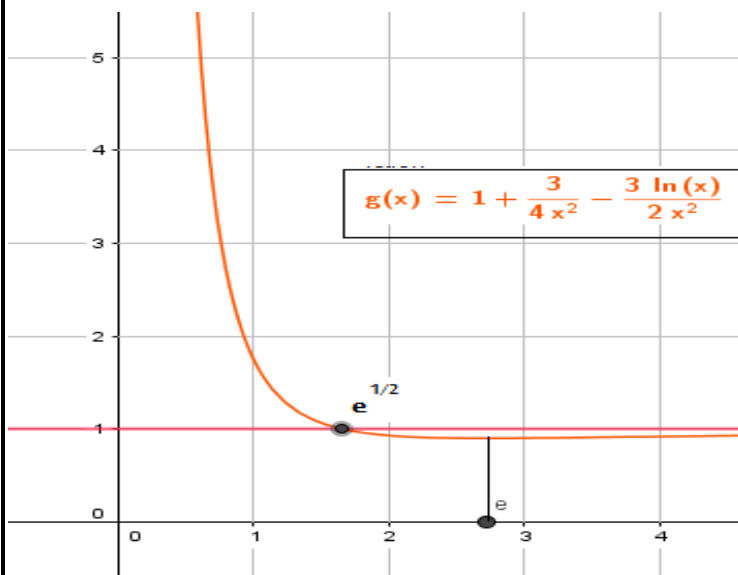
ولیکن (C_f) منحناها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x} = +\infty \quad (1)$$

(ب) بين أنه مهما يكن $f'(x) = g(x)$, $x \in]0, +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

الدالة f تقبل الاشتقاق حيث : $f'(x) = 1 - \frac{12}{16x^2} + \left(\frac{3}{x} 2x - 6 \ln x\right) \frac{1}{4x^2} = 1 - \frac{3}{4x^2} + \frac{3}{2x^2} - \frac{3 \ln x}{2x^2}$

x	0	e	$+\infty$
$-3+3\ln(x)$	-	0	+
$x = e$		+	
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$		0



ومنه $g(x) > 0$, $x \in]0, +\infty[$ وبما ان $f'(x) = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln(x)}{2x^2} = g(x)$ من خلا المنحنى (C_g) والدالة f متزايدة على المجال $]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) أ) ثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x} = 0$ ومنه $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى

(ب) وضعية "المنحنى" (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

$$x = e^{-2} \text{ اي } 3 + 6\ln x = 0 \text{ ومنه } [f(x) - x] = \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x} = 0$$

$x \in]0; e^{-2}[$ المنحنى (C_f) فوق (D) ولما $x \in]e^{-2}; +\infty[$ المنحنى (C_f) تحت (D)

ث) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

بما ان الدالة f متزايدة على المجال $]0, +\infty[$ ومستمرة فهي متزايدة ومستمرة على المجال $]1/2, 1[$ وبما ان $f(1) \approx 1,75$ و $f(0,5) = -0,08$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$$f(\alpha) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا على المجال } \alpha \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$$

نتستنتج بيانيا ان المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α

(3) النقطة الوحيدة B يكون عندها المماس للمنحنى (C_f) موازيا لـ (D) أي $f'(x) = 1$ ومنه $f'(x) - 1 = 0$

$$g(x) - 1 = 0 \text{ أي } \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln(x)}{2x^2} = 0$$

$$\text{ومننه يعني } x = e^{\frac{1}{2}}$$

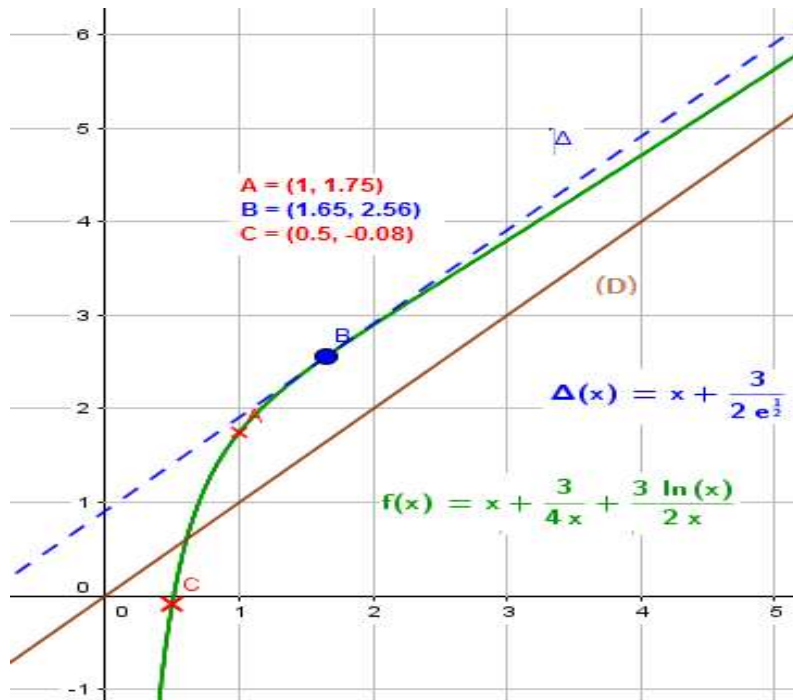
(ب) معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في

$$\text{النقطة B هي: } y = x + \frac{3}{2\sqrt{e}}$$

$$\text{لان } y = \left(x - e^{\frac{1}{2}} \right) + f\left(e^{\frac{1}{2}} \right) \text{ ومننه}$$

$$y = \left(x - e^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{3 + 2e}{2\sqrt{e}} = x + \frac{3}{2\sqrt{e}}$$

(4) الرسم



(5) المناقشة البيانية

$$m \in \left] -\infty; \frac{3}{2\sqrt{e}} \right[\text{ المعادلة تقبل حل وحيد}$$

$$m \in \left] \frac{3}{2\sqrt{e}}; +\infty \right[\text{ المعادلة لا تقبل حلول}$$