

الموضوع الثالث:التمرين الأول:

- (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = 2$ وأساسها $r = 4$.
- (1) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
 - (2) أحسب الحد السابع والحد الخامس والعشرين.
 - (3) نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1:
- $$2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$$
- (4) أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
- $$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$
- ب- أوجد العدد الطبيعي n بحيث:
- $$S_n = 98$$

التمرين الثاني:

- a , b و c أعداد صحيحة بحيث:
- باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3.
 - باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4.
 - باقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.
- (1) عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:
- $$a^2 - b^2 \text{ و } a \times b$$
- (2) أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
- $$c^{2n} \equiv 1 [7]$$
- ب- نتحقق أن:

$$2015 \equiv 6 [7]$$

- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:
- $$2015^{2015} \text{ و } 2015^{2014}$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{-x + 1}$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) عين العدد الحقيقي a حيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن:

$$f(x) = a + \frac{1}{-x + 1}$$

- (2) أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم فسر النتائج هندسيا.

- (3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

- (4) بين أن المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1 يطلب تعيين معادلة كل منهما.

- (5) عين إحداثيي نقط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات.

- (6) أنشئ في نفس المعلم، المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C) .

تصحيح الموضوع الثالث:التمرين الأول:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = 2$ وأساسها $r = 4$.

- (1) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

تغطي عبارة الحد العام u_n لمتتالية حسابية حدها الأول u_1 بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_1 + r(n - 1)$$

$$u_n = 2 + 4(n - 1) \quad \text{بالتعويض:}$$

$$u_n = 2 + 4n - 4 \quad \text{أي:}$$

ومنه نجد:

$$u_n = 4n - 2 = 2(2n - 1)$$

- (2) نحسب الحد السابع والحد الخامس والعشرين:

بما أن الحد الأول هو u_1 فإن:

- الحد السابع هو u_7 .

- الحد الخامس والعشرين هو u_{25} .

● نحسب الحد السابع:

$$u_7 = 4 \times 7 - 2 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه نجد:

$$u_7 = 26$$

● نحسب الحد الخامس والعشرين:

$$u_{25} = 4 \times 25 - 2 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه نجد:

$$u_{25} = 98$$

- (3) نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1:

$$2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$$

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 4(n - 1) - 2 + 4(n + 1) - 2 \quad \text{لدينا:}$$

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 4n - 4 - 2 + 4n + 4 - 2 \quad \text{أي}$$

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 8n - 4 \quad \text{بالاختزال:}$$

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2(4n - 2) \quad \text{ونكتب:}$$

$$u_n = 4n - 2 \quad \text{حيث:}$$

ومنه نجد:

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$$

- (4) أ- نحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

تغطي عبارة مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{(\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})(\text{عدد الحدود})}{2}$$

وعدد الحدود يحسب بالعلاقة التالية:

$$1 + \text{دليل الحد الأول في المجموع} - \text{دليل الحد الأخير في المجموع} = \text{عدد الحدود}$$

حيث:

- الحد الأول في المجموع هو u_1 .
- الحد الأخير في المجموع هو u_n .
- عدد الحدود هو n .

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{بالتعويض ينتج:}$$

$$S_n = \frac{n(2+4n-2)}{2} \quad \text{أي:}$$

ومنه نجد:

$$S_n = 2n^2$$

ب- نبحث عن العدد الطبيعي n بحيث:

$$S_n = 98$$

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة:

$$S_n = 98$$

$$2n^2 = 98$$

$$n^2 = 49$$

$$n = -7 \text{ أو } n = 7$$

بما أن n عدد طبيعي فإن:

$$n = 7$$

التمرين الثاني: a, b و c أعداد صحيحة بحيث:

- باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3.
- باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4.
- باقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.

(1) نعين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:

$$a^2 - b^2 \text{ و } a \times b$$

• نعين باقي قسمة العدد $a \times b$ على 7:

$$a \equiv 3 [7] \dots (1)$$

لدينا:

$$b \equiv 4 [7] \dots (2)$$

ولدينا:

$$a \times b \equiv 12 [7]$$

بضرب (1) في (2) نجد:

$$12 \equiv 5 [7]$$

وبما أن:

$$a \times b \equiv 5 [7]$$

فإن (حسب خاصية التعدي):

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $a \times b$ على 7 هو 5.• نعين باقي قسمة العدد $a^2 - b^2$ على 7:

$$a \equiv 3 [7]$$

لدينا:

$$a^2 \equiv 3^2 [7]$$

حسب خواص الموافقات:

$$3^2 \equiv 2 [7]$$

وبما أن:

$$a^2 \equiv 2 [7] \dots (3)$$

فإن (حسب خاصية التعدي):

$$b \equiv 4 [7]$$

ولدينا:

$$b^2 \equiv 4^2 [7]$$

حسب خواص الموافقات:

$$4^2 \equiv 2 [7]$$

وبما أن:

$$b^2 \equiv 2 [7] \dots (4)$$

فإن (حسب خاصية التعدي):

$$a^2 - b^2 \equiv 0 [7]$$

بطرح (4) من (3) طرف لطرف نجد:

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على 7 هو 0.(2) أ- نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$c^{2n} \equiv 1 [7]$$

$$c \equiv 6 [7]$$

لدينا:

$$6 \equiv -1 [7]$$

وبما أن:

$$c \equiv -1 [7]$$

فإن (حسب خاصية التعدي):

$$c^{2n} \equiv (-1)^{2n} [7]$$

حسب خواص الموافقات:

$$(-1)^{2n} = 1$$

بما أن $2n$ عدد زوجي فإن:ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$c^{2n} \equiv 1 [7]$$

ب- نتحقق أن:

$$2015 \equiv 6 [7]$$

$$2016 \equiv 0 [7]$$

لدينا:

$$2016 \equiv 7 [7]$$

ونكتب أيضا:

$$2016 - 1 \equiv 7 - 1 [7]$$

نضيف العدد (-1) لطرفي الموافقة:

ومنه نجد:

$$2015 \equiv 6 [7]$$

- استنتاج باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:

$$2015^{2015} \text{ و } 2015^{2014}$$

$$2016 \equiv 0 [7]$$

لدينا:

$$2016 - 1 \equiv 0 - 1 [7]$$

$$2015 \equiv -1 [7]$$

نضيف العدد (-1) لطرفي الموافقة:

ومنه نجد:

حسب خواص الموافقات فإن:

$$\begin{cases} 2015^{2014} \equiv (-1)^{2014} [7] \\ 2015^{2015} \equiv (-1)^{2015} [7] \end{cases}$$

$$(-1)^{2014} \equiv 1 [7]$$

بما أن 2014 عدد زوجي فإن:

$$(-1)^{2015} \equiv -1 [7]$$

وبما أن 2015 عدد فردي فإن:

$$(-1)^{2015} \equiv 6 [7]$$

أي:

إذن يمكن أن نكتب:

$$\begin{cases} 2015^{2014} \equiv 1 [7] \\ 2015^{2015} \equiv 6 [7] \end{cases}$$

وبالتالي:

- باقي قسمة العدد 2015^{2014} على 7 هو 1.- باقي قسمة العدد 2015^{2015} على 7 هو 6.التمرين الثالث:نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{-x + 1}$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.(1) نعين العدد الحقيقي a حيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن:

$$f(x) = a + \frac{1}{-x + 1}$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته:
 $x = 1$

(3) ندرس تغيرات الدالة f ثم نشكل جدول تغيراتها:

• ندرس تغيرات الدالة f :

- الدالة المشتقة للدالة f هي:

$$f'(x) = \frac{1}{(-x+1)^2}$$

- دراسة إشارة $f'(x)$:

من أجل كل x من المجال $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ لدينا:

$$f'(x) > 0$$

لأن:

$\begin{cases} 1 > 0 \\ (-x+1)^2 > 0, x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\end{cases}$
 ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

• نشكل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	-2	$+\infty$	-2

(4) نبين أن المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1 ونعين معادلة كل منهما:

• نبين أن المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1:

تعرف معادلة المماس بالعلاقة التالية:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ونكتب أيضا:

$$y = f'(x_0) \cdot x + [f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)]$$

حيث:

$f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس.

نقول أن المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1 إذا كان للمعادلة $f'(x_0) = 1$ حلان متمايزان x_0 و x'_0 .

نحل في $\mathbb{R} - \{1\}$ المعادلة:

$$f'(x_0) = 1$$

$$\frac{1}{(-x_0+1)^2} = 1$$

بعد النشر والترتيب ينتج:

$$x_0(x_0 - 2) = 0$$

ومنه نجد:

$$x'_0 = 2 \text{ أو } x_0 = 0$$

وبالتالي المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1 عند النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 2 على الترتيب.

• تعيين معادلة كل من (Δ) و (Δ'):

لدينا:

$$\begin{cases} (\Delta) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \\ (\Delta') : y = f'(2)(x - 2) + f(2) \end{cases}$$

$$f(x) = a + \frac{1}{-x+1}$$

لدينا:

$$f(x) = \frac{a(-x+1)+1}{-x+1}$$

بتوحيد المقامات ينتج:

$$f(x) = \frac{-ax+(a+1)}{-x+1}$$

بعد النشر والترتيب نجد:

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} -a = 2 \\ a + 1 = -1 \end{cases}$$

ومنه:

$$a = -2$$

وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن:

$$f(x) = -2 + \frac{1}{-x+1}$$

(2) نحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم نفسر النتائج هندسيا:

• نحسب النهايات عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right)$$

- لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right) = 0$$

حيث:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right)$$

- لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right) = 0$$

حيث:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل معادلته:

$$y = -2$$

• نحسب النهايات عند 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right)$$

- لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0^+$$

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{-x+1}\right) = +\infty$$

فينتج:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right)$$

- لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+1) = 0^-$$

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{-x+1}\right) = -\infty$$

فينتج:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

حيث:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = -1 \\ f'(2) = 1 \\ f(2) = -3 \end{cases}$$

ومنه نجد:

$$\begin{cases} (\Delta) : y = x - 1 \\ (\Delta') : y = x - 5 \end{cases}$$

(5) نعين احداثيي نقط تقاطع (C) مع محوري الاحداثيات:

• مع محور الفواصل:

نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

نحل في $\mathbb{R} - \{1\}$ المعادلة:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{2x-1}{-x+1} &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

أي:

ومنه نجد:

إذن (C) يقطع محور الفواصل في النقطة:

$$A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

• مع محور الترتيب:

نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الترتيب هي مجموعة حلول

المعادلة:

$$y = f(0)$$

$$f(0) = -1$$

لدينا:

إذن (C) يقطع محور الترتيب في النقطة:

$$B(0; -1)$$

(6) ننشئ في نفس المعلم، المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C):

• لرسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta) : y = x - 1$$

x	1	0
y	0	-1

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين (1; 0) و (0; -1).

• لرسم المماس (Δ') يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta') : y = x - 5$$

x	5	0
y	0	-5

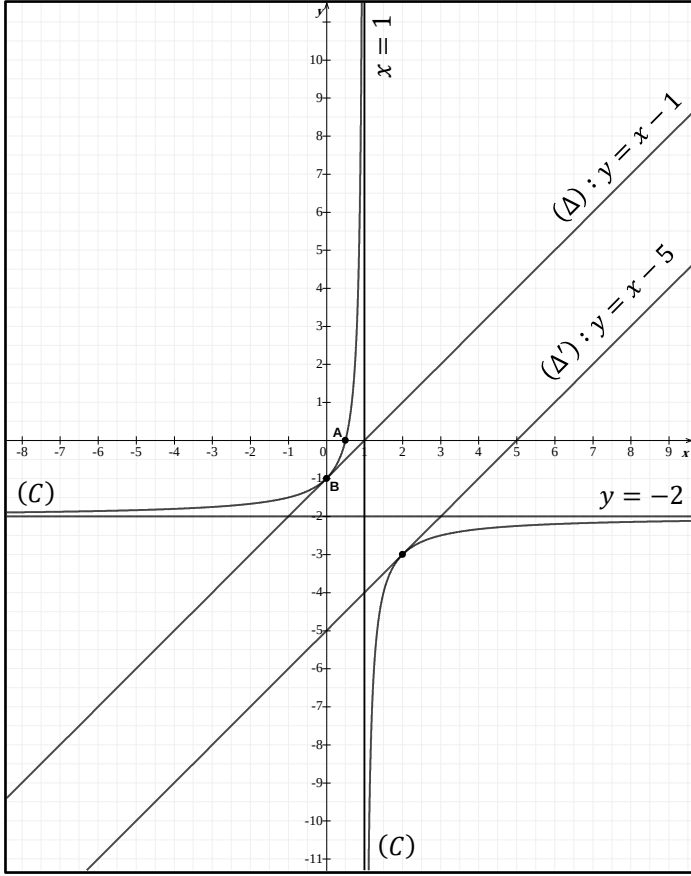
فيصبح المماس (Δ') معرف بالنقطتين (5; 0) و (0; -5).

• لرسم المنحنى (C) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

- المستقيمات المقاربة للمنحنى (C):

$$x = 1$$

$$y = -2$$

- نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل: $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.- نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الترتيب: $B(0; -1)$.

المنحنى الممثل للدالة f

