

الموضوع الأول:التمرين الأول:

- a و b عدنان طبيعيين حيث: $a \equiv 3 [4]$ و $b \equiv 2 [4]$.
- (1) هل العدد $2a + 5b^3$ يقبل القسمة على 4؟
 - (2) أحسب باقي قسمة العدد $a^2 - 2b^3$ على 4.
 - (3) تحقق أن: $a \equiv -1 [4]$.
 - (4) استنتج باقي قسمة العدد $a^{1435} \times a^{2016}$ على 4.
 - (5) استنتج أن: $a^{1435} + a^{2016} \equiv 0 [4]$.

التمرين الثاني:

- لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r ، حيث:
- $$u_{12} = 19 \text{ و } u_3 = 1$$
- (1) عين الأساس r والحد الأول u_0 لهذه المتتالية.
 - (2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
 - (3) عين قيمة n حتى يكون: $u_n = 79$.
 - (4) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
 - (5) استنتج المجموع S_{42} .

التمرين الثالث:

- نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:
- $$f(x) = 2 - \frac{2}{x+2}$$
- (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
 - (2) أحسب نهاية الدالة f عند -2 ثم فسر النتيجة بيانيا.
 - (3) عين الدالة المشتقة f' للدالة f وادرس إشارتها.
 - (4) شكل جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها.
 - (5) عين إحداثيات نقط التقاطع مع المحاور.
 - (6) أكتب معادلة المماس (Δ) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.
 - (7) أرسم (Δ) و (C_f) .



قال عالم الرياضيات والفيزياء سيمون دونيس:
في حياتنا شيان مهمان:
أن نتعلم الرياضيات وأن ندرس الرياضيات.

تصحيح الموضوع الأول:التمرين الأول:

a و b عدنان طبيعيين حيث: $a \equiv 3 [4]$ و $b \equiv 2 [4]$.

- (1) نبحت إن كان العدد $2a + 5b^3$ يقبل القسمة على 4:
نقول عن العدد $2a + 5b^3$ أنه يقبل القسمة على 4 إذا كان:
 $2a + 5b^3 \equiv 0 [4]$

لدينا: $a \equiv 3 [4]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد (2) ينتج: $2a \equiv 6 [4]$

وبما أن: $6 \equiv 2 [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $2a \equiv 2 [4] \dots (1)$

ولدينا: $b \equiv 2 [4]$

وحسب خواص الموافقات: $b^3 \equiv 2^3 [4]$

أي: $b^3 \equiv 8 [4]$

وبما أن: $8 \equiv 0 [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $b^3 \equiv 0 [4]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد (5) ينتج: $5b^3 \equiv 0 [4] \dots (2)$

بجمع الموافقتين (1) و (2) طرف لطرف ينتج:

$$2a + 5b^3 \equiv 2 [4]$$

ومنه العدد $2a + 5b^3$ لا يقبل القسمة على 4.

(2) نحسب باقي قسمة العدد $a^2 - 2b^3$ على 4:

لدينا: $a \equiv 3 [4]$

وحسب خواص الموافقات: $a^2 \equiv 3^2 [4]$

أي: $a^2 \equiv 9 [4]$

وبما أن: $9 \equiv 1 [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a^2 \equiv 1 [4] \dots (3)$

ولدينا مما سبق أن: $b^3 \equiv 0 [4]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد (2) ينتج: $2b^3 \equiv 0 [4] \dots (4)$

نطرح الموافقة (4) من (3) نجد:

$$a^2 - 2b^3 \equiv 1 [4]$$

ومنه باقي قسمة العدد $a^2 - 2b^3$ على 4 هو 1.

(3) نتحقق أن: $a \equiv -1 [4]$.

لدينا: $a \equiv 3 [4]$

نضيف العدد (1) لطرفي الموافقة: $a + 1 \equiv 3 + 1 [4]$

أي: $a + 1 \equiv 4 [4]$

وبما أن: $4 \equiv 0 [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a + 1 \equiv 0 [4]$

نطرح العدد (1) من طرفي الموافقة: $a + 1 - 1 \equiv 0 - 1 [4]$

ومنه:

$$a \equiv -1 [4]$$

(4) استنتج باقي قسمة العدد $a^{1435} \times a^{2016}$ على 4:

لدينا: $a \equiv -1 [4]$

وحسب خواص الموافقات: $a^{1435} \equiv (-1)^{1435} [4]$

ومنه نجد:

$$n = 42$$

حيث:

$$u_{42} = 79$$

(4) نحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{(\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})(\text{عدد الحدود})}{2}$$

ويحسب عدد الحدود بالعلاقة التالية:

1 + دليل الحد الأول في المجموع - دليل الحد الأخير في المجموع = عدد الحدود

حيث:

- الحد الأول في المجموع هو u_0 .- الحد الأخير في المجموع هو u_n .- عدد الحدود هو $n + 1$.

$$S_n = \frac{(n+1)(-5+2n-5)}{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(2n-10)}{2} \quad \text{أي:}$$

بعد الاختزال نجد:

$$S_n = (n+1)(n-5)$$

(5) استنتاج المجموع S_{42} :

نعوض $n = 42$ في عبارة S_n ينتج: $S_n = (42+1)(42-5)$
ومنه نجد:

$$S_n = 1591$$

التمرين الثالث:نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x+2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) نحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right) \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 0 \quad \text{حيث:}$$

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right) \quad \text{ولدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 0 \quad \text{حيث:}$$

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

التفسير البياني:

 (C_f) يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محاور الفواصل معادلته:

$$y = 2$$

بما أن العدد 1435 فردي فإن: $(-1)^{1435} = -1$ فنكتب: $a^{1435} \equiv -1 [4]$ أي: $a^{1435} \equiv 3 [4] \dots (5)$ ولدينا: $a \equiv -1 [4]$ وحسب خواص الموافقات: $a^{2016} \equiv (-1)^{2016} [4]$ بما أن العدد 2016 زوجي فإن: $(-1)^{2016} = 1$ فنكتب: $a^{2016} \equiv 1 [4] \dots (6)$

نضرب الموافقة (5) في الموافقة (6) طرف لطرف نجد:

$$a^{1435} \times a^{2016} \equiv 3 [4]$$

ومنه باقي قسمة العدد $a^{1435} \times a^{2016}$ على 4 هو 3.(5) استنتاج أن: $a^{1435} + a^{2016} \equiv 0 [4]$.بجمع (5) و (6) طرف لطرف ينتج: $a^{1435} + a^{2016} \equiv 4 [4]$ وبما أن: $4 \equiv 0 [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي):

$$a^{1435} + a^{2016} \equiv 0 [4]$$

التمرين الثاني:لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r ، حيث:

$$u_{12} = 19 \text{ و } u_3 = 1$$

(1) نعين الأساس r والحد الأول u_0 لهذه المتتالية:بما أن (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r \\ u_{12} = u_0 + 12r \end{cases}$$

بعد التعويض ينتج:

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 1 & (1) \\ u_0 + 12r = 19 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 + 12r = 19 & (2) \\ u_0 + 3r = 1 & (1) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) طرف لطرف ينتج:

$$(u_0 - u_0) + (12r - 3r) = 19 - 1$$

$$9r = 18$$

أي:

ومنه نجد:

$$r = 2$$

نعوض قيمة r في المعادلة (1) ينتج:

$$u_0 + 6 = 1$$

ومنه نجد:

$$u_0 = -5$$

(2) نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n :تعطى عبارة الحد العام u_n لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

بعد التعويض والترتيب نجد:

$$u_n = 2n - 5$$

(3) نعين قيمة n حتى يكون: $u_n = 79$.نحل $\mathbb{N}$ في المعادلة:

$$u_n = 79$$

$$2n - 5 = 79$$

أي:

(2) نحسب نهاية الدالة f عند -2 :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0^-$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2}{x+2}\right) = -\infty$$

فإن:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0^+$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2}{x+2}\right) = +\infty$$

فإن:

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$$

التفسير البياني:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محور الترتيب معادلته:

$$x = -2$$

(3) نعين الدالة المشتقة f' للدالة f وندرس اشارتها:• حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 - \frac{0(x+2) - 1 \times 2}{(x+2)^2}$$

لدينا:

ومنه نجد:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$$

• دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا:

$$\begin{cases} 2 > 0 \\ (x+2)^2 > 0; x \in]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[\end{cases}$$

$$\frac{2}{(x+2)^2} > 0; x \in]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$$

ومنه:

جدول الإشارة:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$\frac{2}{(x+2)^2}$	+		+
$f'(x)$	+		+

من أجل كل x من $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ لدينا:

$$f'(x) > 0$$

(4) نشكل جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$2 \nearrow$	$+\infty$	$2 \nearrow$

(5) نعين أحداثيات نقط التقاطع مع المحاور:

• مع محور الفواصل:

نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

نحل في المجال $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$

$$2 - \frac{2}{x+2} = 0$$

أي:

$$x = -1$$

ومنه نجد:

ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة:

$$A(-1; 0)$$

• مع محور الترتيب:

نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الترتيب هي مجموعة حلول المعادلة:

$$y = f(0)$$

$$f(0) = 1$$

لدينا:

ومنه (C_f) يقطع محور الترتيب في النقطة:

$$B(0; 1)$$

(6) نكتب معادلة المماس (Δ) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$:تعرف معادلة المماس (Δ) بالعلاقة التالية:

$$(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

حيث:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

بعد التعويض نجد:

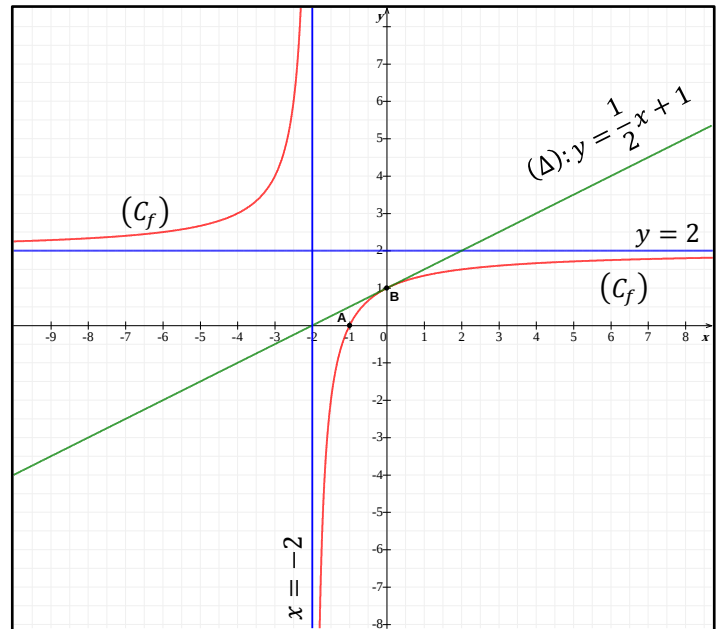
$$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1$$

(7) نرسم (Δ) و (C_f):• لرسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1$$

x	-2	0
y	0	1

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين $(-2; 0)$ و $(0; 1)$.• لرسم المنحنى (C_f) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:- المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).- نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.- نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الترتيب.

المنحنى البياني للدالة f 