الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية فارس بن مهل الشهبونية

امتحان البكالوريا التجريبية — دورة ماي 2015

الشعبة : رياضيات + تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات — **المدة : 4ساعات ونصف**

على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين .

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

N عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{abcca}^{5}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويكتب $\overline{bbab}^{8}$ في نظام التعداد ذي الأساس 8.

1) بين أنَ N يحقق : $309a+15c=226b$.

2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد b.

3) فيما يلي نفرض أنَ : $b=3$.

أ) بين أن، $309(a-2)=60-15c$.

ب) استنتج أن العدد 5 قاسم للعدد $(a-2)$ ثم استنتج كلا من a و c .

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 10.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و I التي لواحقها على الترتيب ، $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq -2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد z' .

1- أ) تحقق من أن : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيلا صرفا.

2- أ) تحقق من أنَ : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$.

ب) استنتج أنَ : $AM\times IM'=\sqrt{2}$ وان $\left(\vec{u},\overrightarrow{IM'}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)\equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنَه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ)ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) بين أن النقطة E تنتمي إلى (Γ)ثم بين أن $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E.

☜ التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$.

ج) **أحسب** عبارة v_n **بدلالة** n **ثم لستنتج أن** $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ **ثم أحسب** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

☜ التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **أحسب** $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا **ثم أحسب** .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{-x})-x$.

4) أ) **أحسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) **أرسم** (Δ) **و** (C_g).

6) **لستنتج لشارة** $g(x)$ عندما يتغير x **في المجموعة** $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

1) برهن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ **ثم أحسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) بيَن أنَه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثمَ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنَه من أجل كل عدد حقيقي x $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ **ثم أحسب** : $\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$.

4) **أحسب** $\int_{-\ln 3}^{0}f(x)\,dx$

☜ الموضوع الثاني

☜ التمرين الأول (04 نقاط)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $\theta \in [0;\pi]$.

نعتبر الأعداد المركبة : $z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$.

1) أكتب كلا من الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي .

2) أ) عين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$.

ب) عيّن عندئذ قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا .

3) نفرض $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C التي لواحقها : z_0, z_1 و z_2 على الترتيب .

أ) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C,-1)\}$.

ب) عيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث ، $\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 3$

☜ التمرين الثاني :(04 نقاط)

☜ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5x - 6y = 3$

1- أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2- a و b عددان طبيعيان حيث :

$a = \overline{1\sim 0\sim 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\sim\ 0\sim}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين $\sim$ و $\sim$ حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) .

☜ التمرين الثالث (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ و $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ و المستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم .

2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A.

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A.

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P').

5) أ) نعتبر النقطة $D(0;4;-1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ج) بين أنَ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}$rad.

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC)

☜ **التمرين الرابع :(08 نقاط)**

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبيَن أنَ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بين أنَه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3- بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8<\alpha<1.9$.

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أنَ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0),f(3)$ ثم أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :
$(E): f(x)=x+m$

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1- أ) بيَن أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب) أحسب I_1.

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنَ : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n.

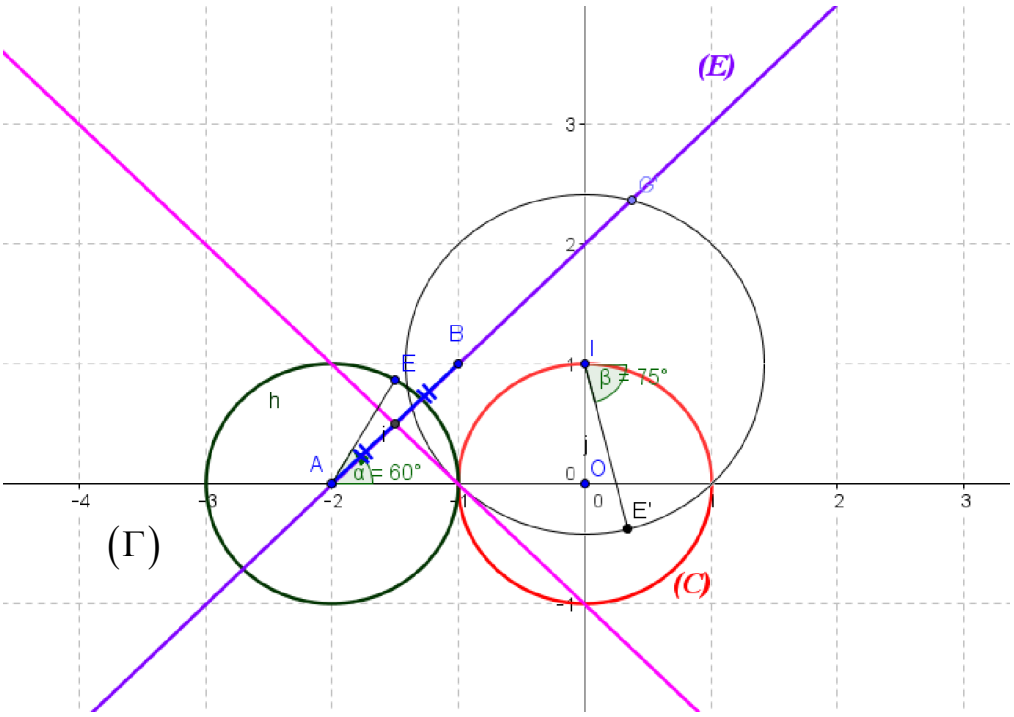
ب) أحسب I_2.

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

❁ مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا جوان 2015 ❁

العلامة	الإجابة
	الموضوع الأول
04	**التمرين الأول**
01	لدينا : $N=\overline{abcca}^{5}$ و $N=\overline{bbab}^{8}$ 1) تبيان أنَ N يحقق : $309a+15c=226b$ • لدينا : $N=a\times5^4+b\times5^3+c\times5^2+c\times5+a\times5^0=625a+125b+25c+5c+a$ أي $N=626a+125b+30c$ • ولدينا : $N=b\times8^3+b\times8^2+a\times8+b\times8^0=512b+64b+8a+b$ أي $N=577b+8a$ • **إذن :** $626a+125b+30c=577b+8a$ **اي** $618a+30c=452b$ ومنه $309a+15c=226b$
0.25	2) تبيان أن العدد 3 قاسم للعدد b : • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ - لدينا : $3/226b$ و $3\wedge226=1$ ومنه $3/b$ حسب مبرهنة غوص .
0.75	3) نفرض $b=3$. أ) تبيان أن : $309(a-2)=60-15c$ • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ ومنه $309a+15c=678$ • ولدينا : $309a-618=60-15c$ ومنه $309(a-2)=60-15c$
2×0.75	ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a-2$: • لدينا : $309(a-2)=5(12-3c)$ $309(a-2)/5$ و $309\wedge5=1$ ومنه $(a-2)/5$ حسب مبرهنة غوص . • استنتاج قيمة a : بما أن $(a-2)/5$ فان : $a-2=5k(k\in\mathbb{N})$ ولدينا : $a<5$ أي أنَ : $a=2$. • استنتاج قيمة العدد c : لدينا : $309\times2+15c=678$ ومنه $15c=678-618$ أي $c=4$
0.5	ج) كتابة العدد N في نظام التعداد 10 : $N=577(3)+8(2)=1747$
04نقاط	**التمرين الثاني** ✍
0.25	• لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$ من أجل $z\neq-2$ **-1- أ) التحقق من أنَ :** $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ • لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}=\dfrac{i\left(z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}{z+2}=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$

ب) تبيان أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان M' تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$: • لدينا : M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM=BM$ • ولدينا : $\lvert z'\rvert=\left\lvert\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}\right\rvert=\dfrac{\lvert i\rvert\times\lvert z+1-i\rvert}{\lvert z+2\rvert}$ أي $OM'=\dfrac{BM}{AM}=1$ • إذن $OM'=1$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $R=1$	0.5
ج) **تعيين طبيعة المجموعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا :** • z' تخيلي صرف معناه $Arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ • ومنه $Arg\left(\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ أي $Arg(i)+Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ معناه : $\dfrac{\pi}{2}+Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $Arg\left(\dfrac{z+1-i}{z+2}\right)=k\pi$ أي $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=k\pi$ • المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B. $(E)=(AB)-\{A,B\}$	0.5
2- أ) التحقق من أنَ : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$ • لدينا : $z'-i=\dfrac{iz+i+1}{z+2}-i=\dfrac{iz+i+1-iz-2i}{z+2}=\dfrac{1-i}{z+2}$ أي $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$	0.25
ب) استنتاج أنَ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$: • لدينا : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$ ومنه $\lvert z'-i\rvert=\left\lvert\dfrac{1-i}{z+2}\right\rvert$ أي $\lvert z'-i\rvert=\dfrac{\lvert 1-i\rvert}{\lvert z+2\rvert}$ وبالتالي : $IM'=\dfrac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM'\times AM=\sqrt{2}$	0.25
• **استنتاج أنَ : $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$** لدينا : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$ ومنه $Arg(z'-i)=Arg\left(\dfrac{1-i}{z+2}\right)$ أي $Arg(z'-i)=Arg(1-i)-Arg(z+2)$ ومنه $Arg(z'-i)+Arg(z+2)=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ اي $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$	0.5
ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها : • لدينا : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM=1$ • ولدينا : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ أي $IM'=\sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$	0.5

0.25	**3-** لدينا : $z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **أ) تبيان أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ) :** • **لدينا :** $AE = \lvert z_E - z_A \rvert = \left\lvert -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \right\rvert = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ ومنه $E \in (\Gamma)$
0.5	• **تبيان أن :** $(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$: لدينا : $z_{\overrightarrow{AE}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) = arg\left(z_{\overrightarrow{AE}}\right) = Arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أي $(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
0.5	**ب) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E :** **لدينا :** $EE' = \sqrt{2}$ ولدينا : $(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}) + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ومنه $(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}) = -\frac{7\pi}{12}[2\pi]$ 
05 نقاط	**التمرين الثالث**
0.25	• لدينا : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$ **1- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،** $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

- لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$	
2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$ نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . 1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$ اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$. 2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$. - لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$ وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$ وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة . 3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.	0.75
ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ • لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$. • **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :** ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ - لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$ وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$ - ولدينا : $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ - أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.	0.25 0.5
ج) **دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$. • **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$	0.5

3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية : — 0.75

- لدينا : $v_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

أي $v_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1} = \dfrac{3\times 3^n \times \dfrac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\dfrac{2u_n}{2u_n+1}-1} = \dfrac{\dfrac{6\times 3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\dfrac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$

ومنه $v_{n+1} = 6\times\dfrac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\dfrac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1} = 6\times\dfrac{3^n\times u_n}{2u_n-1} = 6v_n$ هندسية أساسها $q=6$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

وحدها الأول $v_0 = \dfrac{3^0\times u_0}{2u_0-1} = \dfrac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1} = \dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\dfrac{1}{3}$

ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n : — 0.5

- لدينا : $v_n = v_0\times q^n = -\dfrac{1}{3}\times 6^n$
- **استنتاج أنَ : $u_n = \dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$** — 0.75

- لدينا : $v_n = \dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n - v_n = 3^n u_n$ أي $2u_nv_n - 3^n u_n = v_n$
- ومنه $\left(2v_n - 3^n\right)u_n = v_n$ وبالتالي : $u_n = \dfrac{v_n}{2v_n-3^n}$

إذن : $u_n = \dfrac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right)-3^n} = -\dfrac{6^n}{-2\times 6^n - 3\times 3^n}$ ومنه

أي $u_n == -\dfrac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n} = \dfrac{2^n\times 3^n}{2\times 3^n\times 2^n + 3\times 3^n}$ $u_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}+3} = \dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}+3} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{2}$ — 0.5

التمرين الرابع	**07 نقاط**

I. لدينا : $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - ln\left(e^x+1\right)$

1) حساب النهايات :

- **حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$:**

0.25

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1}=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(e^x+1\right)=0 \end{cases} \quad \text{لأنَ} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=0$$

0.25

- **التفسير الهندسي** : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $\left(C_g\right)$ بجوار $-\infty$

0.25

- **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **:**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^x+1\right)=+\infty \end{cases} \quad \text{لأنَ} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=-\infty$$

0.5

2) تبيان أنَ $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$

- لدينا : $g'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

أي $g'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$

0.25

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة** g **:**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$-e^{2x}$	$-$
$g'(x)$	$-$

0.5

- **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$

0.5

3) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x **:** $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$

- لدينا : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}-ln\left[e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه :

$g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$ أي $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(e^x\right)-ln\left(1+e^{-x}\right)$

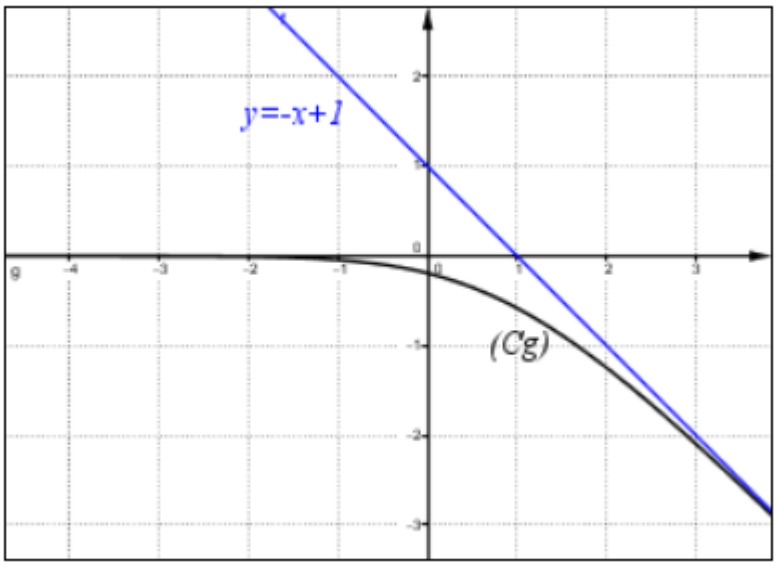
4) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ **:**

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لانَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$

- **تفسير النتيجة :** المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_g\right)$ عند $-\infty$.

5) الرسم :



6) استنتاج اشارة $g(x)$ **:**

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

II. لدينا : $f(x)=e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)$

1) البرهان أنَ : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

- نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانَ : $t\to 0$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{ln(t+1)}{t}=1$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

- **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=0$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x **،** $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ **:**

- لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times ln\left(e^{x}+1\right)+e^{-x}\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-ln\left(e^{x}+1\right)\right)$

أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

0.25

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$+\infty$ $-\infty$
$g(x)$	$-$
$f'(x)$	$-$

0.5

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$+\infty$ $-\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

0.25

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

- حساب $\int_{-ln3}^{0}\dfrac{1}{e^x+1}dx$:

0.5

$$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-ln3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-ln3}^{0}=-ln2+ln\left(1+e^{ln3}\right)$$

أي $\int_{-ln3}^{0}\dfrac{1}{e^x+1}dx=-ln2+ln4=-ln2+2ln2=ln2$

4) حساب $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx$: بالمكاملة بالتجزئة

0.5

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx$$

نضع : $u'(x)=e^{-x}$ ومنه $u(x)=-e^{-x}$

و $v(x)=ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

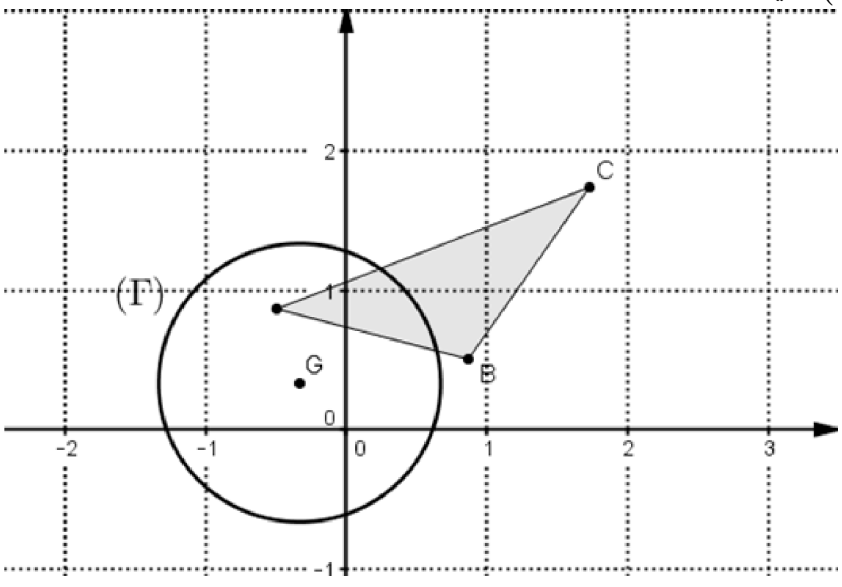
إذن :

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}ln\left(e^x+1\right)\right]_{-ln3}^{0}-\int_{-ln3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

أي $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+e^{ln3}ln\left(e^{-ln3}+1\right)+\int_{-ln3}^{0}\dfrac{1}{e^x+1}dx$

إذن $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=3ln\dfrac{4}{3}$ $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+3ln\left(\dfrac{1}{3}+1\right)+ln2=3ln\dfrac{4}{3}$

الإجابة	العلامة
التمرين الأول :	**04 نقاط**
• لدينا : $z_0 = r\left(-\cos\theta + i\sin\theta\right)$ ، $z_1 = r^2\left(\sin\theta + i\cos\theta\right)$ و $z_2 = \sqrt{3}\left(1+i\right)$ حيث $r \in \mathbb{R}^{*+}$ و $\theta \in [0;\pi]$ **1) كتابة الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي :** • لدينا : $z_0 = r\left(\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\right)$ $z_1 = r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$ $z_2 = \sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	3×0.5
2) أ) تعيين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$ • لدينا : $\overline{z_0} = r\left(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta)\right)$ - $z_1 = \overline{z_0}$ معناه $r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = r\left(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta)\right)$ ومنه : أي $\begin{cases} r^2 = r \\ \frac{\pi}{2}-\theta = -\pi+\theta+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} r^2 - r = 0 \\ -2\theta = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right) \end{cases}$ وبالتالي : إذن $\begin{cases} r = 0 \vee r = 1 \\ -2\theta = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi\left(k\in\{0;1\}\right) \end{cases}$ من أجل $k=0$ نجد : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (مقبول لأنّ $\theta\in[0;\pi]$) من أجل $k=1$ نجد $\theta = \frac{3\pi}{4} - \pi$ (مرفوض) $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ معناه $z_1 = \overline{z_0}$	0.75

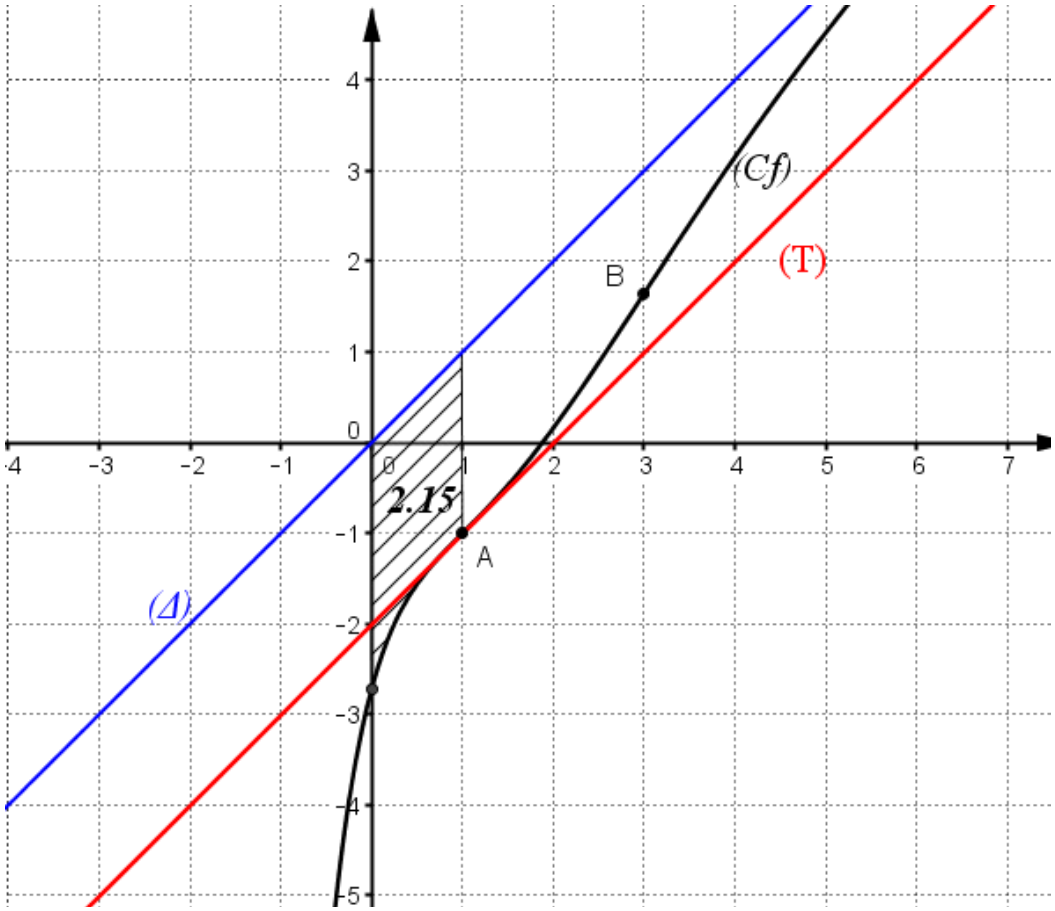
ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا : • لدينا : $\frac{z_0}{z_1}=\frac{1\left(cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{1^2\left(cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$ $\frac{z_0}{z_1}=cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}$	0.25
$\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n=cos\frac{n\pi}{2}+i\,sin\frac{n\pi}{2}$ اي • إذن $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقي معناه $sin\frac{n\pi}{2}=0$ أي $\frac{n\pi}{2}=k\pi$ وبالتالي : $n=2k\left(k\in\mathbb{N}\right)$	0.25
3) لدينا : $r=1$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ • إذن : $z_0=-cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_1=sin\frac{\pi}{3}+i\,cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ **أ) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$** • لدينا : $z_G=\frac{2z_A+2z_B-z_C}{2+2-1}=\frac{-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$	0.5
ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ): • لدينا : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3$ معناه $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3$ ومنه $3MG=3$ أي $MG=1$ وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها $R=1$  	0.75

التمرين الثاني	04 نقاط
لدينا : $(E): 5x-6y=3$ **1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3 :** • لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$ أي $5x=3(1+2y)$ • لدينا : $3/5x$ و $5\wedge 3=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3	0.25
ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) : • نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\frac{5\times 3-3}{6}=\frac{12}{6}=2$ أي الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E)	0.5
• **حل المعادلة (E) :** لدينا : $5x-6y=5\times 3-6\times 2$ يكافئ $5x-5\times 3=6y-6\times 2$ أي $(*): 5(x-3)=6(y-2)$ • لدينا : $6/5(x-3)$ و $5\wedge 6=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص . أي $x-3=6k(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3(k\in\mathbb{Z})$ • من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$ ومنه $y-2=5k(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2(k\in\mathbb{Z})$ - مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$	0.5
ج) استنتاج حلول الجملة : $(S): \begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$ • $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=6m-1 \\ x=5n-4 \end{cases}$ أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$ ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11(k\in\mathbb{Z})$	0.75
2- لدينا : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}^{3}$ و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}^{5}$ • **تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E) :** - لدينا : $a=1\times 3^5+\alpha\times 3^4+\alpha\times 3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$ ولدينا : $b=\alpha\times 5^3+\beta\times 5^2+\alpha\times 5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$ مع $\alpha\le 2$ و $\beta\le 4$ • **الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$** ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$ اي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$ بعد تقسيم الطرفين على العدد 3- نجد : $102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة	0.75 0.75

التمرين الثالث	04 نقاط
لدينا : $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$ **1) البرهان على أنّ المثلث ABC قائم :** - لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$ ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$ و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$ إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة A .	0.5
2) البرهان على أنّ المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A : • لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) - إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$ - نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$ وبالتالي : **المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A**	0.5
3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A : لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل : $3x-3z+d=0$ - تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد : $3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$ وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$	0.5
4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') : • لدينا : $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ وبالتالي إذن : $\begin{cases}z+1+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ $\begin{cases}x=z+1\\y=-2z+2\end{cases}$ - نضع : $z=t$ وبالتالي : $(t\in\mathbb{R})$; $(\Delta):\begin{cases}x=t+1\\y=-2t+2\\z=t\end{cases}$	0.5
5) أ) تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) • **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن : - $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$ - **وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)**	0.5

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: $v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$ - لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و $AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$ - أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$ $v_{ABCD}=27uv$	0.5
ج) تبيان أنَ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$: - لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times 6-3(-6)+6\times 0=36+18=54$ - ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ أي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ $cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)=\frac{54}{9\times 6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\widehat{BDC}=45^\circ$	0.5
د) حساب مساحة المثلث BDC : - $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times sin\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$ - **استنتاج المسافة بين النقطة** A **والمستوي** (BDC) : **لدينا :** $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d\left(A,(BCD)\right)=\frac{1}{3}\times 27\times d\left(A,(BCD)\right)=27$ **ومنه** $d\left(A,(BDC)\right)=\frac{27}{\frac{1}{3}\times 27}=3$ $d\left(A,(BDC)\right)=3$	0.5
التمرين الرابع	**08 نقاط**
I. لدينا : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$ **1) أ) حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$: - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$ لأنَ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{cases}$	0.25
• **تبيان أنَ :** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$: لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$	0.25

	أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$
0.5	**ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$:** • **لدينا :** $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)\left(-e^{-x+1}\right)\right]=1-(2x-x^2-1)e^{-x+1}$ **وبالتالي :** $f'(x)=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$
0.25	**ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :** x | $-\infty$ $+\infty$ $(x-1)^2e^{-x+1}$ | $+$ $f'(x)$ | $+$
0.5	• **جدول التغيرات :** x | $-\infty$ $+\infty$ $f'(x)$ | $+$ $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$
0.25	**2) تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:** • لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-(x^2+1)e^{-x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$
0.5	• **دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :** لدينا : $f(x)-x=x-(x^2+1)e^{-x+1}-x=-(x^2+1)e^{-x+1}$ إذن $f(x)-x<0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x
0.5	**3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:** • **لدينا** f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$ **ولدينا** $f(1.8)=1.8-\left((1.8)^2+1\right)e^{-1.8+1}=-0.11$ $f(1.9)=1.9-\left((1.9)^2+1\right)e^{-1.9+1}=0.03$ وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$ حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

0.5	**4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:** $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ $y = 1\times(x-1)-1 = x-2$ أي $(T): y = x-2$
01	**5) تبيان أنّ $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:** • لدينا : $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1}+(x-1)^2\times(-e^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$ أي $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$. • **استنتاج أنّ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :** - جدول إشارة $f''(x)$: x : $-\infty$; 1 ; 3 ; $+\infty$ $f''(x)$: $-$; 0 ; $+$; 0 ; $-$ • **المشتقة الثانية** $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1;f(1)), B(3;f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحنى (C_f)
01	**6) حساب $f(3), f(0)$:** $f(3) = 3-9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$ **الرسم :** 

7) **المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$** • هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) . • إذا كان $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا . • إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما . • إذا كان $m\in]-e;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا . • إذا كان $m\in[0;+\infty[$ المعادلة ليس لها حلا .	0.5
II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$ **1- أ) تبيان أنّ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:** • لدينا : $G'(x)=-\left[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}\right]=-\left(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1}\right)=xe^{-x+1}=g(x)$ ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.	0.5
ب) **حساب I_1** : • لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=\left[-(x+1)e^{-x+1}\right]_0^1=-2e^0+e=e-2$	0.25
2- أ) تبيان أنّ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ • لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$ نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$ ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$ وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\left(-e^{-x+1}\right)dx$ ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$	0.5
ب) حساب I_2 : $I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$	0.25
3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1,x=0$: $S=\int_0^1\left[y-f(x)\right]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$ أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+\left[-e^{-x+1}\right]_0^1$ $S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2=2.15cm^2$	0.5