

على المترشح اختيار احد الموضوعين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

- °1 حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - 2z + 5 = 0$.
°2 نعتبر في المستوي المركب المنسوب على معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$ النقط I, B, A التي لواحقها على الترتيب $z_I = 1 - 2i, z_B = -3, z_A = 2 + \sqrt{3}$.

أ/ اكتب على الشكل الجبري العدد المركب : $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.

ب/ اكتب العدد المركب Z على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث IAB .

ج / احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

- °3 أ / لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$ احسب z_G لاحقة النقطة G .

ب/ عين طبيعة المجموعة (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z من المستوي حيث :

$$2\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$$

ج / عين طبيعة المجموعة (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z من المستوي حيث :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_1 = \sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

1- احسب الحدود u_2, u_3, u_4 و u_4 (تدور النتائج الى 10^{-2}) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2- أ- بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n \leq n + 3$

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

3- $(v_n)_{n \geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $v_n = u_n - n$

أ- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها العام v_n

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n

$$4- \text{نضع من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq 1 : S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n \text{ ثم عين } T_n = \frac{S'_n}{n^2} \text{ و } S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \text{ بحسب المجموعين } S_n \text{ و } S'_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم عين } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$$

التمرين الثالث (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$: نعتبر النقط: $A(3,2,1)$ و $B(3,5,4)$ و $C(0,5,1)$

1- بين ان المثلث ABC متقايس الأضلاع

2- تحقق ان الشعاع $\vec{n}(1,1,-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكرتية له

3- ا- عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC)

ج - تحقق ان النقطة $F(4,6,0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $FABC$

4- بين ان المستقيمين (FA) و (BC) متعامدين

$$5- \text{ا- عين المجموعة } (S) \text{ للنقط } M \text{ من الفضاء التي تحقق } \|\vec{MG} + \vec{MF}\| = 6$$

ب- عين الوضع النسبي للمجموعة (S) والمستوي (ABC)

التمرين الرابع : (06 نقاط)

(I) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{لتكن الدالة } g \text{ المعرفة على المجال }]-\infty, 3[\text{ كمايلي : } g(x) = \frac{-x+1}{-x+3} + \ln(-x+3)$$

(1) احسب نهايات g عند اطراف مجال تعريفها .

(2) أدرس تغيرات الدالة g .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,5;1,7[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $] -\infty, 3[$ كمايلي: $f(x) = (x-1)\ln(-x+3)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) .

1° أ / - احسب نهايات f عند اطراف مجال تعريفها .

ب /- أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

$$2^\circ \text{ بين ان } f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha} \text{ ثم استنتج حصر الـ } f(\alpha) .$$

3° حل في المجال $] -\infty, 3[$ المعادلة : $f(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $] -\infty, 3[$

4° احسب $f(-2)$ و $f(-3)$ ثم ارسم بدقة المنحنى (C_f) .

$$5^\circ F \text{ دالة عددية على المجال }] -\infty, 3[\text{ كمايلي: } F(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)\ln(-x+3)$$

تحقق ان F دالة أصلية للدالة f على المجال $] -\infty, 3[$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (06 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط $A(3; 4; 0)$ ، $B(0; 5; 0)$ ، $C(0; 0; 5)$ ، $D(-2; -6; 5)$ ، $E(-4; 0; -3)$ ، والشعاع $\vec{n}(1; 3; 3)$

1. بين أن النقط A, B, C تعين مستو (ABC) ، تأكد أن $\vec{n}$ شعاعه الناظمي ثم اكتب معادلة ديكارتية له
2. ا / برهن أن المثلث AOB متساوي الساقين .

ب / عين إحداثيي النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ، ثم بين أن $OI = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

ج / بين أن $\vec{OC}$ عمودي على المستوي (AOB)

د / استنتج حجم رباعي الوجوه $OABC$

3. احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

4. ا / جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DE) .

ب / اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة المستقيمة $[DE]$.

ج / تحقق ان النقطة $F\left(-1; 1; \frac{7}{2}\right)$ تنتمي للمستوي (Q) .

د / استنتج المسافة بين النقطة F والمستقيم (DE) .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها

على الترتيب : $Z_a = i$ ، $Z_b = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $Z_c = -1$

1- نعتبر التحويل النقطي (S) المعروف بـ : $Z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}Z + 1 - i$

ما طبيعة التحويل (S) وما عناصره المميزة .

2- - عين لواحق النقط A', B', C' صور النقط A, B, C بالتحويل (S)

3- أ) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة : $\{(A, 3); (B, 1); (C, -2)\}$

ب) عين لاحقة النقطة G' مرجح الجملة $\{(A', 3); (B', 1); (C', -2)\}$

ج) تأكد أن $G' = S(G)$ ، ماذا تستنتج ؟

4- التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M(z')$ حيث : $\overline{MM'} = 3\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}$

ا- بين أن : $\overline{GM'} = \overline{MG}$ واستنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

ب- عين لواحق النقط : E, D و F صور النقط A, B, C بالتحويل T

ج - بين أن المثلثين ABC و EDF متقايسان .

التمرين الثالث (09نقط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على R كما يلي $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1- احسب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة g

2- شكل جدول تغيرات g ثم علّل وجود عدد حقيقي α حيث $-0.36 < \alpha < -0.38$ يحقق $g(\alpha) = 0$

3 - استنتج إشارة $g(x)$ على R

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 ا- بين انه من اجل كل x من R : $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f

ب- بين ان $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha-1}$ ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3- بين ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها

4- ا- بين ان (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = 2x + 1$ بجوار $+\infty$

ب- ادرس الوضع النسبي للبيان (C_f) والمستقيم (Δ)

ج - أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق وعلى المجال $[-1.5; +\infty[$ يعطى $f(-1.5) = 4.72$

5- لتكن الدالة h المعرفة على R كمايلي : $h(x) = f(x^2e^x)$

باستعمال مشتق دالة مركبة . استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

6- لتكن الدالة k المعرفة على R كما يلي $k(x) = (ax+b)e^{-x}$

ا- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة k دالة أصلية للدالة $x \rightarrow -xe^{-x}$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على R

الموضوع الأول

$$U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n+1, U_1 = \sqrt{e} \quad \text{التمرين الثاني:}$$

(1) حساب u_4, u_3, u_2 :

$$0.75 \quad U_2 = \frac{2}{3}U_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}\sqrt{e} + \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{e} + 4}{3} \approx 2,43$$

$$U_3 = \frac{2}{3}U_2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{e} + 4}{3}\right) + \frac{5}{3} = \frac{4\sqrt{e} + 23}{9} \approx 3,28$$

$$U_4 = \frac{2}{3}U_3 + \frac{3}{3} + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{4\sqrt{e} + 23}{9}\right) + 2 = \frac{8\sqrt{e} + 100}{9} \approx 12,58$$

(2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n+3$ * من أجل $n=1$: $U_1 = \sqrt{e} \approx 1,6$ ومنه $U_1 \leq 1+3$ (محققة)* نفرض أن $U_n \leq n+3$ صحيحة ونبين أن: $U_{n+1} \leq n+4$

$$\text{لدينا: } U_n \leq n+3 \text{ ومنه: } \frac{2}{3}U_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$$

$$\frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n+1 \leq \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n+1 \quad \text{إذن:}$$

$$U_{n+1} \leq n+3 \leq n+4 \text{ ومنه } U_{n+1} \leq n+4$$

ومنه: $U_{n+1} \leq n+4$ إذن $p(n+1)$ صحيحة* الإستنتاج: من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n+3$

$$(ب) \quad U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n+1 - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}n+1 - \frac{1}{3}U_n = \frac{1}{3}(n+3 - U_n)$$

$$\text{لدينا: } U_n \leq n+3 \text{ ومنه: } n+3 - U_n \geq 0$$

$$\text{أي: } \frac{1}{3}(n+3 - U_n) \geq 0 \text{ ومنه: } U_{n+1} - U_n \geq 0$$

ومنه: (U_n) متزايدة(3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية:

$$V_n = U_n - n \quad \text{لدينا:}$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n+1 - n - 1 = \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3}n$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n \quad \text{أي: } V_{n+1} = \frac{2}{3}(U_n - n)$$

$$V_1 = U_1 - 1 = \sqrt{e} - 1 \quad (V_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ وحدها الأول}$$

$$0.25 \quad V_n = V_1 \times q^{n-1} \quad \text{(ب) عبارة } V_n$$

$$V_n = (\sqrt{e} - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$0.25 \quad V_n = U_n - n \quad \text{(ب) عبارة } U_n$$

$$U_n = (\sqrt{e} - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n \quad \text{ومنه } U_n = V_n + n \text{ إذن:}$$

$$Z^2 - 2Z + 5 = 0 \quad \text{التمرين الأول:}$$

$$(1) \quad \Delta = -16 \quad \text{حلا المعادلة هما: } 1$$

$$Z_2 = 1 - 2i \quad \text{و} \quad Z_1 = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i$$

$$Z_A = 2 + \overline{Z_I} \quad , \quad Z_B = -3 \quad , \quad Z_I = 1 - 2i \quad \wedge$$

$$Z_A = 3 + 2i$$

$$Z = \frac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B} = \frac{1 - 2i - 3 - 2i}{1 - 2i + 3} = \frac{-2 - 4i}{4 - 2i}$$

$$Z = \frac{-1 - 2i}{2 - i} = \frac{(-1 - 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-2 - i - 4i + 2}{4 + 1}$$

$$0.5 \quad Z = -i \quad \text{ومنه: } Z = \frac{-5i}{5}$$

$$0.5 \quad Z = e^{-\frac{\pi}{2}i} \quad (ب)$$

$$\arg\left(\frac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B}\right) = \frac{-\pi}{2} \quad \text{و} \quad \left|\frac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B}\right| = 1$$

$$0.5 \quad (\vec{IB}; \vec{IA}) = \frac{-\pi}{2} \quad \text{و} \quad AI = BI$$

AIB قائم في I ومتساوي الساقين

(ج) لدينا $h(A; 2)$ تحاكي و $h(I) = C$

$$Z' - Z_A = 2(Z - Z_A) \quad \text{الكتابة المركبة لتحاكي:}$$

$$Z_C - Z_A = 2(Z_I - Z_A) \quad \text{ومنه: } h(I) = C$$

$$Z_C = 2Z_I - Z_A$$

$$0.5 \quad Z_C = 2 - 4i - 3 - 2i = -1 - 6i$$

$$Z_C = -1 - 6i$$

$$0.5 \quad G \text{ مرجح الجملة: } \{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$$

$$(أ) \quad Z_G = \frac{Z_A - Z_B + Z_C}{1 - 1 + 1} = \frac{3 + 2i + 3 - 1 - 6i}{1} = 5 - 4i$$

$$(ب) \quad 2\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$$

لتكن H منتصف [AB]

$$2\|(1-1+1)\vec{MG}\| = \|(1+1)\vec{MH}\|$$

$$0.75 \quad MG = MH \quad \text{ومنه: } 2MG = 2MH$$

مجموعة النقط (Γ_1) محور القطعة [GH]

$$(ج) \quad \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$$

$$0.75 \quad MG = 4\sqrt{5} \quad \text{ومنه} \quad \|(1-1+1)\vec{MG}\| = 4\sqrt{5}$$

مجموعة النقط (Γ_2) دائرة مركزها G ونصف قطرها $r = 4\sqrt{5}$

(4) حساب: $S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_n$

لدينا: $V_n = V_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2} \right]$$

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left[1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right]$$

0.5

$$S_n = \frac{6}{5} (\sqrt{e} - 1) \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right] \text{ أي } S_n = \frac{2}{3} V_1 \left[1 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \right]$$

حساب: $S'_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

لدينا: $U_n = V_n + n$ ومنه:

$$S'_n = (V_1 + 1) + (V_2 + 2) + \dots + (V_n + n)$$

$$S'_n = (V_1 + V_2 + \dots + V_n) + (1 + 2 + \dots + n)$$

$$S'_n = V_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} + \frac{n}{2} (1 + n)$$

$$S'_n = (\sqrt{e} - 1) \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n}{2} (1 + n)$$

0.5

$$S'_n = 3(\sqrt{e} - 1) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$$

0.25

$$T_n = \frac{S'_n}{n^2} = \frac{3}{n^2} (\sqrt{e} - 1) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}$$

0.25

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2}$$

التمرين الثالث: C(0,5,1) B(3,5,4) A(3,2,1)

(1) إثبات أن ABC متقايس الأضلاع:

$$\vec{BC}(-3,0,-3) \quad , \quad \vec{AC}(-3,3,0) \quad , \quad \vec{AB}(0,3,3)$$

$$AB = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

إذن ABC متقايس الأضلاع $AB = AC = BC$ (2) التحقق أن $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC):

0.25

ومنه $\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 + 3 - 3 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = -3 + 3 + 0 = 0 \end{cases}$ أي: $\vec{n} \perp (ABC)$

ومنه $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC)معادلة (ABC): $x + y - z + d = 0$

0.5

أي: $A(3,2,1) \in (ABC)$ $3 + 2 - 1 + d = 0$ أي: $d = -4$ ومنه:

$$(ABC): x + y - z - 4 = 0$$

(3) تعيين إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC:

0.25

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

أي: $G\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{2+5+5}{3}, \frac{1+4+1}{3}\right)$ ومنه: $G(2,4,2)$

(ب) التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) لدينا $G(2,4,2) \in (\Delta)$ و $(\Delta) \perp (ABC)$

0.5

يمكن اعتبار $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

0.25

(ج) التحقق أن $F(4,6,0)$ تنتمي إلى (Δ) :

أي: $F \in (\Delta)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2 + t \\ 6 = 4 + t \\ 0 = 2 - t \end{cases}$ ومنه: $t = 2$ قيمة وحيدة ومنه $F \in (\Delta)$

حساب حجم FABC:

لدينا (Δ) يشمل F و عمودي على (ABC) ويمر من G

مركز ثقل ABC ومنه G المسقط العمودي لـ F على (ABC)

إن FG ارتفاع الهرم FABC الذي قاعدته ABC

$$V = \frac{1}{3} A \times FG$$

حساب A مساحة ABC: ليكن h ارتفاع المثلث ABC

$$h = \frac{3\sqrt{6}}{2} \quad \text{ومنه:} \quad \left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 + h^2 = (\sqrt{18})^2$$

$$A = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$FG = \sqrt{(2-4)^2 + (4-6)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{3}$$

0.75

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 9$$

(4) إثبات أن $(FA) \perp (BC)$

0.25

$$\vec{BC}(-3,0,-3) \quad \text{و} \quad \vec{FA}(-1,-4,1)$$

أي: $\vec{FA} \cdot \vec{BC} = 3 + 0 - 3 = 0$ ومنه $\vec{FA} \perp \vec{BC}$ إذن $(FA) \perp (BC)$

إثبات أن $f(\alpha) = (\alpha-1)\ln(-\alpha+3)$ **لدينا** : $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$

ولدينا : $g(\alpha) = 0$ **ومنه** : $-\frac{\alpha+1}{-\alpha+3} + \ln(-\alpha+3) = 0$

ومنه : $f(\alpha) = (\alpha-1) \times \frac{(\alpha-1)}{-\alpha+3}$ **إذن** : $\ln(-\alpha+3) = \frac{\alpha-1}{-\alpha+3}$

$f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$

حصر : $f(\alpha)$

$0,25 < (\alpha-1)^2 < 0,49$ **ومنه** $1,5 < \alpha < 1,7$ **إذن** $0,5 < \alpha-1 < 0,7$

$\frac{1}{1,5} < \frac{1}{3-\alpha} < \frac{1}{1,3}$ **ومنه** $-1,7 < -\alpha < -1,5$ **إذن** $1,3 < 3-\alpha < 1,5$

$0,2 < f(\alpha) < 0,4$ **ومنه** $\frac{0,25}{1,5} < \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha} < \frac{0,49}{1,3}$

حل المعادلة $f(x) = 0$ **لدينا** : $(x-1)\ln(-x+3) = 0$

($x-1=0$ أو $\ln(-x+3)=0$) **ومنه** ($x=1$ أو $-x+3=e^0$)

$x=2$ أو $x=1$

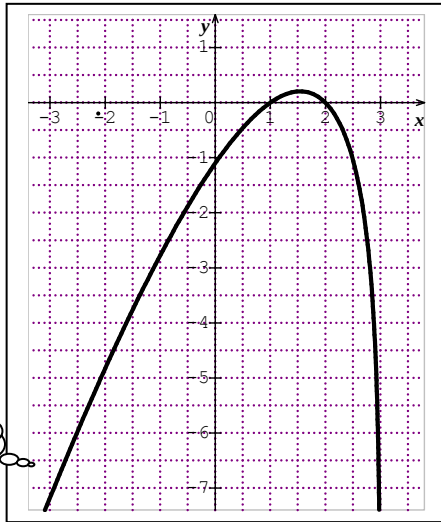
إشارة : f

x	$-\infty$	1	2	3
$x-1$	-	0	+	+
$\ln(-x+3)$	+	+	0	-
f	-	0	+	-

(4)

$f(-3) = -4\ln 6 \approx -7,2$ و $f(-2) = -3\ln 5 \approx -4,9$

رسم : (C_f)



0.75

(5) إثبات أن F **دالة أصلية للدالة** f

$F(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)\ln(-x+3)$

$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right) \times \frac{-1}{-x+3}$

$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 2x - 3)}{x-3}$

$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$

$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$F'(x) = (x-1)\ln(-x+3) = f(x)$

(5) أتعين (S) **مجموعة النقط** $\vec{MG} + \vec{MF} = 6 : M$

لتكن I منتصف $[FG]$ **ومنه** $\|(1+1)\vec{MI}\| = 6$ أي $MI = 3$

(S) **سطح كرة مركزها** I **و نصف قطرها** $r = 3$

ب)الوضع النسبي بين (S) **و** (ABC) :

نحسب إحداثيات I : $I\left(\frac{4+2}{2}, \frac{6+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ **ومنه** $I(3,5,1)$

نحسب المسافة بين I **و** (ABC)

لدينا : $d(I, (ABC)) = \frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

0.25

$d(I, (ABC)) < r$ **إذن** : (ABC) **يقطع** (S) **وفق دائرة**

التمرين الرابع :

(I) $D_g =]-\infty; 3[$ ، $g(x) = \frac{-x+1}{-x+3} + \ln(-x+3)$

0.5

$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

(2) **اتجاه التغير** : $g'(x) = \frac{-2}{(-x+3)^2} - \frac{1}{(-x+3)}$

$g'(x) = \frac{x-5}{(-x+3)^2}$

x	$-\infty$	3
$x-5$	-	-

0.5

جدول تغيرات g

x	$-\infty$	3
$g'(x)$	-	-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

0.5

(3) **لدينا** f **مستمرة ومتناقصة تماما على** **المجال** $[1,5; 1,7]$ **وأيضا** $f(1,5) \times f(1,7) < 0$

لأن : $f(1,5) \approx 0,07$ و $f(1,7) \approx -0,27$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** $1,5 < \alpha < 1,7$

x	$-\infty$	α	3
g	+	0	-

(3) إشارة g :

0.25

(II) $D_g =]-\infty; 3[$ ، $f(x) = (x-1)\ln(-x+3)$

0.5

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(2) **اتجاه التغير** : $f'(x) = 1 \times \ln(-x+3) + (x-1) \times \frac{-1}{-x+3}$

0.5

$f'(x) = g(x)$

إشارة $f'(x)$ **نفس إشارة** $g(x)$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	α	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

0.5

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

$D(-2, -6, 5) \quad C(0, 0, 5) \quad B(0, 5, 0) \quad A(3, 4, 0)$
 $E(-4; 0; -3)$

(1) التحقق أن النقط C, B, A تعين مستوي:

$\vec{AB}(-3, 1, 0)$ و $\vec{AC}(-3, -4, 5)$

لدينا $(\frac{-3}{-3} \neq \frac{-4}{1})$ ومنه $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطياً

C, B, A ليست على استقامة فهي تشكل المستوي (ABC)

(2) التحقق أن $\vec{n}(1; 3; 3)$ ناظمي للمستوي (ABC) :

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = -3 + 3 + 0 = 0$ ومنه $\vec{n} \perp \vec{AB}$
 $\vec{n} \cdot \vec{AC} = -3 - 12 + 15 = 0$ ومنه $\vec{n} \perp \vec{AC}$
 أي: $\vec{n} \perp (ABC)$

ومنه $\vec{n}(1; 3; 3)$ ناظمي للمستوي (ABC)

معادلة (ABC) : $x + 3y + 3z + d = 0$

$A(3, 4, 0) \in (ABC)$ أي: $3 + 12 + d = 0$ أي: $d = -15$ ومنه:

$(ABC): x + 3y + 3z - 15 = 0$

(2) إثبات أن AOB متساوي الساقين:

$OA = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$OB = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$OA = OB$ إذن AOB متساوي الساقين

ب) حساب إحداثيات I منتصف $[AB]$

ومنه $I(\frac{3+0}{2}, \frac{4+5}{2}, \frac{0+0}{2})$ و $I(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0)$

حساب OI :

$OI = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{9}{2})^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

حساب حجم $OABC$:

لدينا: $\vec{OC}(0, 0, 5)$ $\vec{OA}(3, 4, 0)$ $\vec{OB}(0, 5, 0)$

$\vec{OC} \cdot \vec{OA} = 0$ ومنه $\vec{OC} \perp \vec{OA}$
 $\vec{OC} \cdot \vec{OB} = 0$ ومنه $\vec{OC} \perp \vec{OB}$
 إذن $\vec{OC} \perp (AOB)$

إذن OC ارتفاع الهرم $OABC$ الذي قاعدته AOB

$V = \frac{1}{3} A \times OC$

لدينا $OC = 5$

حساب A مساحة AOB : $A = \frac{1}{2} \times OI \times AB$

ومنه: $AB = \sqrt{10}$ و $A = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{10} = \frac{15}{2}$

حجم رباعي الوجوه: $V = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 5 = \frac{25}{2}$

(3) حساب المسافة بين O و (ABC) :

لدينا: $d(O, (ABC)) = \frac{|0+0+0-15|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}} = \frac{15}{\sqrt{19}} = \frac{15\sqrt{19}}{19}$

(4) التمثيل الوسيطى للمستقيم (DE)

لدينا $\vec{DE}(-2, 6, -8)$ و $E \in (DE)$

$(DE): \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 6t \\ z = -3 - 8t \end{cases}$

ب) معادلة (Q) المستوي المحوري للقطعة $[DE]$:

ليكن H منتصف $[DE]$:

ومنه $H(\frac{-4-2}{2}, \frac{0-6}{2}, \frac{-3+5}{2})$ و $H(-3, -3, 1)$

(Q) يشمل H وشعاعه الناظمي $\vec{DE}(-2, 6, -8)$

معادلته: $-2x + 6y - 8z + d = 0$

$H \in (Q)$ أي: $6 - 18 - 8 + d = 0$ أي: $d = 20$ ومنه:

$(Q): -2x + 6y - 8z + 20 = 0$

$(Q): x - 3y + 4z - 10 = 0$

(ج) التحقق أن $F(-1; 1; \frac{7}{2}) \in Q$

$-1 - 3 + \frac{28}{2} - 10 = 0$ إذن $0 = 0$ ومنه $F \in Q$

(3) استنتاج المسافة بين F و (DE) :

$d(F, (DE)) = FH$

$FH = \sqrt{(-3+1)^2 + (-3-1)^2 + (1-\frac{7}{2})^2}$

$FH = \sqrt{4+16+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2}$

$$Z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}Z + 1 - i$$

(1) S تشابه مباشر نسبته 2 و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ ومركزه W

لدينا: $2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$

0.75

$$2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3}$$

$$Z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}(i\sqrt{3})}$$

$$Z_W = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(-i\sqrt{3})}{i\sqrt{3}(-i\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$W(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3})$$

تعيين لواحق C', B', A' بالتشابه S :

$$Z' = (1-i\sqrt{3})Z + 1 - i$$

$$Z_{A'} = (1-i\sqrt{3})Z_A + 1 - i \quad \text{اي} \quad S(A) = A'$$

$$Z_{A'} = 1 + \sqrt{3} \quad \text{ومنه} \quad Z_{A'} = (1-i\sqrt{3})i + 1 - i$$

$$Z_{B'} = (1-i\sqrt{3})Z_B + 1 - i \quad \text{اي} \quad S(B) = B'$$

$$Z_B = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$Z_B = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - i$$

$$Z_{B'} = (1-i\sqrt{3})(1-i) + 1 - i$$

$$Z_{B'} = 1 - i - i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 - i$$

0.25

$$Z_{B'} = (2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})i$$

$$Z_{C'} = (1-i\sqrt{3})Z_C + 1 - i \quad \text{اي} \quad S(C) = C'$$

$$Z_{C'} = (\sqrt{3} - 1)i \quad \text{ومنه} \quad Z_{C'} = (1-i\sqrt{3})(-1) + 1 - i$$

(3) G مرجح الجملة : $\{(A;3), (B;1), (C;-2)\}$

0.25

$$Z_G = \frac{3Z_A + Z_B - 2Z_C}{3+1-2} = \frac{3i + 1 - i - 2(-1)}{2}$$

0.5

$$Z_G = \frac{3}{2} + i$$

(ب) G' مرجح الجملة : $\{(A';3), (B';1), (C';-2)\}$

$$Z_{G'} = \frac{3Z_{A'} + Z_{B'} - 2Z_{C'}}{3+1-2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3(1+\sqrt{3}) + 2 - \sqrt{3} + (-2-\sqrt{3})i - 2(\sqrt{3}-1)i}{2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3+3\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-2i-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i+2i}{2}$$

$$Z_{G'} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

0.5

$$Z_{G'} = (1-i\sqrt{3})Z_G + 1 - i \quad \text{ومنه} \quad S(G) = G' \quad \text{(ج)}$$

$$Z_{G'} = (1-i\sqrt{3})(\frac{3}{2} + i) + 1 - i$$

$$Z_{G'} = \frac{3}{2} + i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \sqrt{3} + 1 - i$$

0.5

$$Z_{G'} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

الاستنتاج: التشابه المباشر يحافظ على المرجح

$$GM' = MG \quad \text{(أ) إثبات أن}$$

$$MM' = 3MA + MB - 2MC \quad \text{حسب علاقة شال}$$

$$\vec{MG} + \vec{GM}' = 3(\vec{MG} + \vec{GA}) + \vec{MG} + \vec{GB} - 2(\vec{MG} + \vec{GC})$$

$$\vec{GM}' = (3+1-2-1)\vec{MG} + \underbrace{3\vec{GA} + \vec{GB} - 2\vec{GC}}_0$$

0.5

$$\vec{GM}' = -\vec{GM} \quad \text{إذن} \quad \vec{GM}' = \vec{MG}$$

التحويل تحاكي مركزه G ونسبته 1- (تناظر مركزه G)

(ب) تعيين لواحق F, E, D صور C, B, A بالتحاكي $T(G;-1)$:

$$Z' - Z_G = -(Z - Z_G) \quad \text{الكتابة المركبة لتحاكي}$$

$$Z_D - Z_G = -(Z_A - Z_G) \quad \text{ومنه} \quad T(A) = D$$

$$Z_D = -Z_A + 2Z_G$$

0.25

$$Z_D = 3 + i \quad \text{ومنه} \quad Z_D = -i + 2(\frac{3}{2} + i) = 3 + i$$

$$Z_E - Z_G = -(Z_B - Z_G) \quad \text{ومنه} \quad T(B) = E$$

$$Z_E = -Z_B + 2Z_G$$

0.25

$$Z_E = 2 + 3i \quad \text{ومنه} \quad Z_E = -(1-i) + 2(\frac{3}{2} + i)$$

$$Z_F - Z_G = -(Z_C - Z_G) \quad \text{ومنه} \quad T(C) = F$$

$$Z_F = -Z_C + 2Z_G$$

0.25

$$Z_F = 4 + 2i \quad \text{ومنه} \quad Z_F = -(-1) + 2(\frac{3}{2} + i)$$

(أ) إثبات أن المثلثين ABC و EDF متقايسان :

$$T(C) = F \quad \text{و} \quad T(B) = E \quad \text{و} \quad T(A) = D \quad \text{لدينا}$$

المثلث EDF صورة المثلث ABC بالتحاكي T الذي يضرب

الأطوال في $|K|$ حيث $(k = -1)$ نسبة التحاكي (ومنه :

$$ED = |-1|BA = BA$$

0.5

$$EF = |-1|BC = BC$$

$$DF = |-1|AC = AC$$

ومنه ABC و EDF متقايسان

استنتاج إشارة $f'(x)$:

0.25

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	3
f'	-	0	+

0.5

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(ب) إثبات أن $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$:

لدينا : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha}$

و $g(\alpha) = 0$ ومنه $(\alpha - 1)e^{-\alpha} + 2 = 0$ إذن $e^{-\alpha} = \frac{-2}{\alpha - 1}$

ومنه $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$

لكن : $\frac{2\alpha}{\alpha - 1} = 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

ومنه : $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$

حصر $f(\alpha)$: $-0,38 < \alpha < -0,36$

$2(-0,38) + 3 < 2\alpha + 3 < 2(-0,36) + 3$

$$2,24 < 2\alpha + 3 < 2,28$$

$$-1,38 < \alpha - 1 < -1,36$$

$$\frac{2}{-1,36} < \frac{2}{\alpha - 1} < \frac{2}{-1,38}$$

$$2,24 - \frac{2}{1,36} < 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1} < 2,28 - \frac{2}{1,38}$$

$$0,77 < f(\alpha) < 0,83$$

(3) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا : $f'(x) = g(x)$

ومنه : $f''(x) = g'(x) = (2 - x)e^{-x}$

إشارة $f''(x)$ من إشارة $2 - x$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

$f''(x)$ تتعدم عند 2 مغيرة إشارتها ومنه النقطة

$B(2; f(2))$ أي $B(2; 5 - 2e^{-2})$ نقطة انعطاف

التمرين الثالث : $D_g = \mathbb{R}$ ، $g(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$

(1) النهايات :

0.5

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x - 1)e^{-x} + 2] = -\infty$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x - 1)e^{-x} + 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} - e^{-x} + 2) = 2$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

0.5

حساب المشتق :

$$g'(x) = (2 - x)e^{-x} \text{ ومنه } g'(x) = e^{-x} + (x - 1)(-e^{-x})$$

إشارة المشتق :

0.5

$g'(x) = 0$ أي $2 - x = 0$ ومنه $x = 2$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2 - x$ لأن $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

0.5

(2) جدول تغيرات g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$2 + e^{-2}$	2

(2) تحليل وجود عدد $-0,38 < \alpha < -0,36$ يحقق $g(\alpha) = 0$:

لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0,38; -0,36]$

وأيضا $g(-0,36) \times g(-0,38) < 0$

لأن : $g(-0,38) \approx -0,02$ و $g(-0,36) \approx 0,05$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $-0,38 < \alpha < -0,36$

استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	3
g	-	0	+

0.25

(II) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(2 + \frac{1}{x} - e^{-x}) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = +\infty$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$

(2) تبيان أن $f'(x) = g(x)$

0.25

$$f'(x) = 2 - e^{-x} - x(-e^{-x})$$

$$f'(x) = (x - 1)e^{-x} + 2 = g(x)$$

(5) حساب مشتق h : $h(x) = f(x^2 e^x)$

$$h'(x) = (x^2 e^x)' \times f'(x^2 e^x)$$

$$(x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = (2x + x^2) e^x \quad \text{لدينا:}$$

$$h'(x) = (2x + x^2) e^x \times f'(x^2 e^x) \quad \text{ومنه:}$$

$$f'(x^2 e^x) = g(x^2 e^x) \quad \text{ومنه:} \quad f'(x) = g(x) \quad \text{لدينا:}$$

$$h'(x) = (2x + x^2) e^x \times g(x^2 e^x) \quad \text{ومنه:}$$

إشارة $h'(x)$:

من إشارة $2x + x^2$ لأن $e^x > 0$ و $g(x^2 e^x) > 0$

(لاحظ جدول إشارة g على المجال $[0; +\infty[$)

$$x(x+2) = 0 \quad \text{أي} \quad 2x + x^2 = 0 \quad \text{ومنه:} \quad x = 0 \quad \text{أو} \quad x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^2 + 2x$		$+$	0	$-$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0

جدول تغيرات h :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$		$h(-2)$		$+\infty$

(6) لدينا $k(x) = (ax+b)e^{-x}$

(أ) تعيين العددين a و b :

بما أن k دالة أصلية للدالة $x \rightarrow -xe^{-x}$ فإن:

$$k'(x) = -xe^{-x}$$

$$k'(x) = ae^{-x} + (ax+b)(-e^{-x})$$

$$k'(x) = (-ax+a-b)e^{-x}$$

$$(-ax+a-b)e^{-x} = -xe^{-x} \quad \text{ومنه:}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = a = 1 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} -a = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

$$k(x) = (x+1)e^{-x} \quad \text{إن:}$$

(ب) استنتاج دالة أصلية للدالة f :

$$f(x) = 2x+1 - xe^{-x}$$

ومنه دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي:

$$F(x) = x^2 + x + (x+1)e^{-x}$$

(4) إثبات أن $y = 2x+1$ (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي (C_f) و (Δ) :

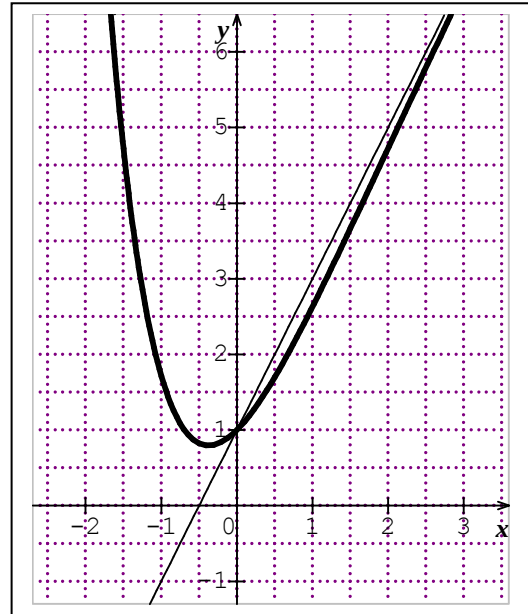
$$f(x) - (2x+1) = -xe^{-x}$$

إشارة الفرق من إشارة $-x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة الفرق		$+$	$-$
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

$$(C_f) \cap (\Delta) = \{(0;1)\}$$

رسم (C_f) :



0.5