الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية **ثانوية فارس بن مهل الشهبونية**

امتحان البكالوريا التجريبية **دورة ماي 2015**

الشعبة : آداب وفلسفة + لغات أجنبية

اختبار في مادة : الرياضيات **المدة : 02 ســـــا و 30 د**

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول(06 نقاط):

1. عيّن بواقي القسمة للعدد 2^n على 5 من أجل العدد الطبيعي n حيث : $n \in \{1;2;3,4\}$
2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2^{4n} \equiv 1[5]$
3. استنتج بواقي القسمة للأعداد 2^{4n+1} ; 2^{4n+2} ; 2^{4n+3} على 5.
4. عيّن باقي قسمة كل من 2^{1436} و 2^{2015} على 5 .
5. تحقق أن : $2017 \equiv 2[5]$ ثم استنتج باقي قسمة 2017^{2014} على 5.

التمرين الثاني (06 نقاط):

(u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي: $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$

1. احسب كلا من u_1, u_2, u_3.
2. نضع $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ من اجل كل n من $\square$.

- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الأساس و الحد الأول.
- عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n.

3. احسب المجموع S_n بحيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ثم استنتج المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$.

التمرين الثالث(08 نقاط):

لتكن f الدالة المعرفة على $\square - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{3+2x}{1-2x}$,

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
2) استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) .
3) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C) مع محوري الإحداثيات .
4) أكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.
5) أرسم المماس (Δ) و المنحني (C_f) .

الموضوع الثاني:

التمرين الأول (06 نقاط):

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على N حيث : $U_6 = 448$ و $U_3 \times U_5 = 12544$

1) أحسب الحد U_4 ثم الأساس q لهذه المتتالية .
2) أحسب الحد الأول U_0 لهذه المتتالية .
   * نضع : $U_0 = 7$ و $q = 2$

3) أكتب عبارة U_n بدلالة n.
4) بين أن 896 هو حد من حدود المتتالية (U_n) وحدد رتبته .
5) أحسب المجموع : $S = U_6 + U_7 + ... + U_n$

التمرين الثاني : (06 نقاط)

a , b و c أعداد صحيحة بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3 , باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6 .

1)عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين : $a \times b$, $a^2 - b^2$.

2) أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $c^{2n} \equiv 1[7]$.

ب/ تحقق أن $2015 \equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين :

2015^{2014} و 2015^{2015} على 7 .

التمرين الثالث :(08نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.
   ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f واستنتج جدول تغيراتها .
2) أثبت أنه من أجل x من R : $f(x) = -(x-1)^2(x+2)$
3) برهن أن النقطة A من المنحني التي فاصلتها $x = 0$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C_f).
4) تحقق من أن النقطة B التي إحداثيتها $(2;-4)$ هي نقطة من المنحني (C_f) ثم أوجد معادلة للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عندها .
5) أنشئ (C_f) و (Δ) في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

المستوى : 3 آ ف + 3 ع

تصحيح البكالوريا التجريبي

الموضوع الأول :

التمرين الأول :

1- تعيين باقي قسمة 2^n على 5 :

$2^0 \equiv 1[5]$ ، $2^1 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$

$2^3 \equiv 3[5]$ ، $2^4 \equiv 1[5]$

حسب n	4k	4k+1	4k+2	4k+3
البواقي	1	2	4	3

2- لدينا $2^{4n} \equiv 1[5]$ ومنه $2^4 \equiv 1[5]$

3- $2^{4n+2} \equiv 4[5]$ ، $2^{4n+2} \equiv 3[5]$ ، $2^{4n+1} \equiv 2[5]$

4- تعيين باقي قسمة 2^{2015} و 2^{1436} على 5 :

* لدينا $1436 = 4 \times 359$ ومنه $2^{1436} \equiv 1[5]$

* لدينا : $2015 = 4 \times 503 + 3$ ومنه $2^{2015} \equiv 3[5]$

أي : الباقي هو 3 .

5- لدينا : $2017 - 2 = 2015$

ولكن 2015 من مضاعفات 5

ومنه $2017 \equiv 2[5]$

* لدينا $2017 \equiv 2[5]$ ومنه $2017^{2014} \equiv 2^{2014}[5]$

لكن $2014 = 4 \times 503 + 2$ (أي $2^{2014} \equiv 4[5]$

أي : $2017^{2014} \equiv 4[5]$ (خاصية التعدي)

التمرين الثاني :

$u_{n+1} = 3u_n + 2$: $n \in \mathbb{N}$ من أجل كل و $u_0 = 5$

1- $u_1 = 3u_0 + 2 = 15 + 2 = 17$

$u_2 = 3u_1 + 2 = 51 + 2 = 53$

$u_3 = 3u_2 + 2 = 159 + 2 = 161$

2- نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + 1$

أ- $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}$

$= 3u_n + 1 + \frac{1}{2}$

$= 3u_n + \frac{3}{2}$

$= 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول v_0 حيث :

$v_0 = u_0 + \frac{1}{2}$

$= 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

ب- تعيين عبارتي v_n و u_n بدلالة n :

* لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$

ومنه : $v_n = \left(\frac{11}{2}\right) \times (3)^n$

* لدينا : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ ومنه $u_n = v_n - \frac{1}{2}$

أي : $u_n = \left(\frac{11}{2}\right) \cdot 3^n - \frac{1}{2}$

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$= v_0 \cdot \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = \frac{11}{2}\left(\frac{1 - (3)^{n+1}}{1 - 3}\right)$

$S_n = \frac{11}{4}\left(3^{n+1} - 1\right)$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= \left(v_0 - \frac{1}{2}\right) + \left(v_1 - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(v_n - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(v_0 + v_1 + \cdots + v_n\right) - \frac{1}{2}(n+1)$$
$$= S_n - \frac{1}{2}(n+1)$$
$$= \frac{11}{4}\left(3^{n+1} - 1\right) - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$
$$S'_n = \frac{11 \cdot 3^{n+1}}{4} - \frac{1}{2}n - \frac{13}{4}$$

التمرين الثالث

$$f(x) = \frac{3+2x}{1-2x}$$

1- دراسة تغيرات الدالة f:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	

f دالة قابلة للاشتقاق على مجالي التعريف

ومنه: $f'(x) = \dfrac{2(1-2x) + 2(3+2x)}{(1-2x)^2}$

$$f'(x) = \frac{2 - 4x + 6 + 4x}{(1-2x)^2} = \frac{8}{(1-2x)^2}$$

لدينا من أجل $x \in D_f$ يكون $f'(x) > 0$

ومنه f دالة متزايدة تماما على كل مجالي التعريف.

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1

2- المستقيمات المقاربة:

معادلة لمستقيم مقارب لـ (C_f) موازي لمحور الفواصل: $y = -1$

معادلة لمستقيم مقارب لـ (C_f) موازي لمحور التراتيب: $x = \frac{1}{2}$

3- أ- التقاطع مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \text{ معناه } \begin{cases} 3 + 2x = 0 \\ 1 - 2x \neq 0 \end{cases}$$

معناه $x = \frac{-3}{2}$ و $x \neq \frac{1}{2}$

ومنه نقطة التقاطع هي: $H\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$.

ب- التقاطع مع محور التراتيب:

$f(0) = y$ ومنه $y = 3$

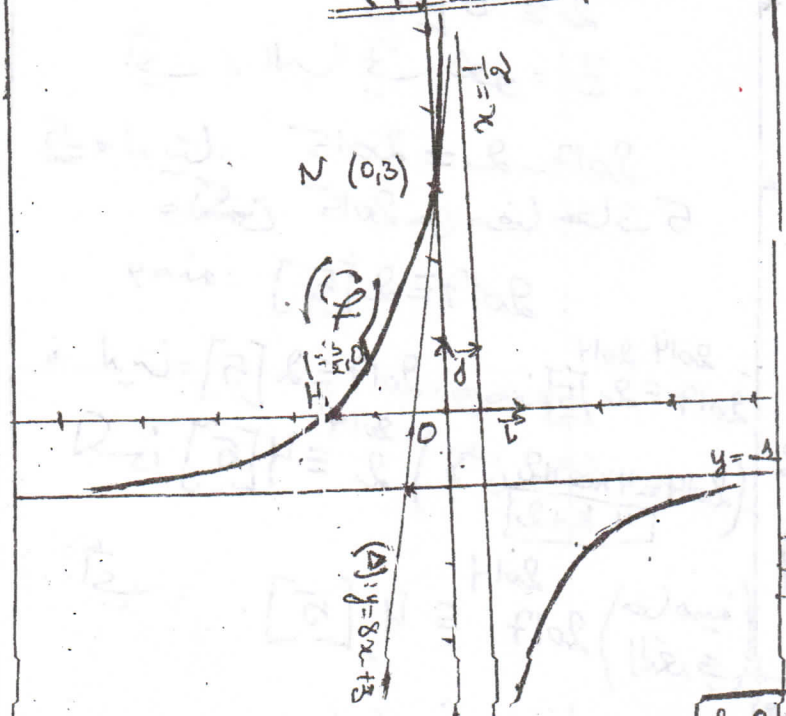
نقطة التقاطع هي $N(0,3)$.

4- كتابة معادلة المماس:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

(Δ): $y = 8x + 3$

5- رسم (C_f) و (Δ):



الموضوع الثاني :

التمرين الأول :

$u_6 = 448$ ، $u_3 \times u_5 = 12544$

1- حساب u_4 : لدينا

$u_4^2 = u_3 \times u_5 = 12544$

ومنه $u_4 = \sqrt{12544}$

$\boxed{u_4 = 112}$

لدينا : $u_6 = u_4 \times q^2$

ومنه $q^2 = \frac{u_6}{u_4} = \frac{448}{112}$

$\boxed{q^2 = 4}$

أي $\boxed{q = 2}$ او $\boxed{q = -2}$ مرفوض

بما أن الحدود موجبة فإن $\boxed{q = 2}$

2- حساب u_0 :

لدينا : $u_4 = u_0 \times q^4$ ومنه $u_0 = \frac{u_4}{q^4}$

أي : $u_0 = \frac{112}{16} = 7$

$\boxed{u_0 = 7}$ و $\boxed{q = 2}$

3- كتابة عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه : $\boxed{u_n = 7 \times 2^n}$

4- اثبات أن 896 هو حد من حدود (u_n) :

لدينا : $u_n = 896$ ومنه $7 \times 2^n = 896$

ومنه $2^n = \frac{896}{7}$

ومنه : $2^n = 128 = 2^7$

ومنه : $\boxed{n = 7}$

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2

وبالتالي العدد 896 هو حد من حدود (u_n) رتبته 7 .

5- حساب S_n :

$S_n = u_6 + u_7 + \dots + u_n$

$= u_6 \left(\frac{1 - q^{n-5}}{1 - q_{n-5}} \right)$

$= 448 \left(\frac{1 - 2}{1 - 2} \right)$

$\boxed{S_n = 448 \left(2^{n-5} - 1 \right)}$

التمرين الثاني :

لدينا : $a \equiv 3 [7]$ ، $b \equiv 4 [7]$ ، $c = 6 [7]$

1- *تعيين باقي القسمة لـ axb على 7 :

لدينا : $\begin{cases} a \equiv 3 [7] \\ b \equiv 4 [7] \end{cases}$ ومنه : $axb \equiv 12 [7]$ (3×4)

لكن : $12 \equiv 5 [7]$

أي : $\boxed{axb \equiv 5 [7]}$

*** تعيين باقي القسمة لـ $a^2 - b^2$ على 7 :**

لدينا : $\begin{cases} a \equiv 3 [7] \\ b \equiv 4 [7] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a^2 \equiv 9 [7] \\ b^2 \equiv 16 [7] \end{cases}$

ومنه : $a^2 - b^2 \equiv -5 [7]$ (-3-16)

لكن $-5 \equiv 2 [7]$

ومنه : $\boxed{a^2 - b^2 \equiv 2 [7]}$

2- أ- لدينا : $c \equiv 6 [7]$ ومنه $c^2 \equiv 1 [7]$

أي : $\boxed{c^{2n} \equiv 1 [7]}$

ب- لدينا $2015 - 6 = 2009$

لكن 2009 من مضاعفات العدد 7

ومنه: $\boxed{2015 \equiv 6 [7]}$.

تعيين بواقي القسمة العدد 6^n على 7:

$6^0 \equiv 1[7]$ ، $6^1 \equiv 6[7]$ ، $6^2 \equiv 1[7]$

لما $n = 2k$ فإن الباقي هو 1

لما $n = 2k+1$ فإن الباقي هو 6.

لدينا: $2015 \equiv 6[7]$ ومنه $6^{2014} \equiv 6[7]$ *

لكن $6^{2014} \equiv 1[7]$ $(2014 = 2 \times 1007)$

أي: $\boxed{6^{2014} \equiv 1[7]}$

لدينا: $2015 \equiv 6[7]$ * ومنه $2015^{2015} \equiv 6^{2015}[7]$

لكن $6^{2015} \equiv 6[7]$

أي: $\boxed{2015^{2015} \equiv 6[7]}$.

التمرين الثالث:

$f(x) = -x^3 + 3x - 2$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

أ- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

ب- دراسة إتجاه التغير:

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه:

$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1)$

$f'(x) = 0$ معناه $x^2 - 1 = 0$

معناه $x^2 = 1$

معناه $x = 1$ أو $x = -1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0 $-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(-1)=-4$ ↗	$f(1)=0$ ↘	$-\infty$

2) $f(x) = -(x-1)^2(x+2)$ (النشر والتبسيط).

3) f' دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه:

$f''(x) = -6x$

$f''(x) = 0$ معناه $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

ومنه $A(0,-2)$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

4) لدينا: $f(2) = -4$

ومنه $B(2,-4)$ نقطة من (C_f).

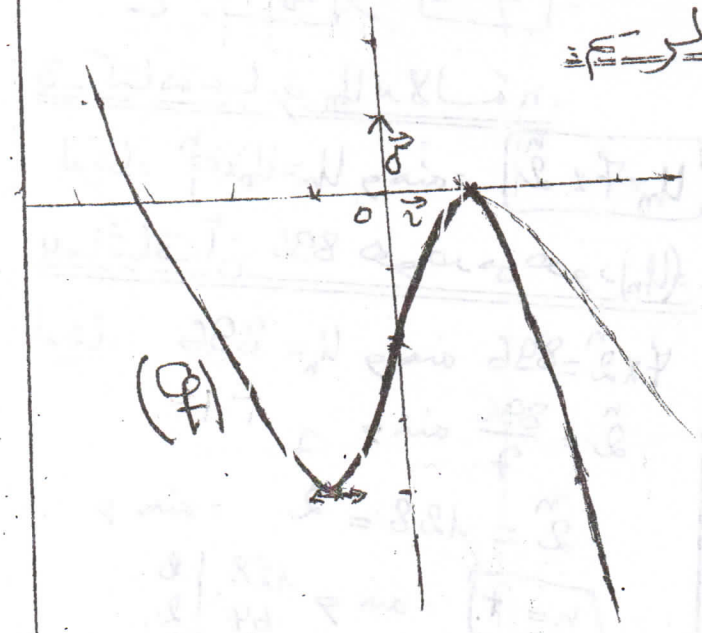
كتابة معادلة المماس عند B:

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

$= -9x + 18 - 4$

$\boxed{(\Delta): y = -9x + 14}$

5- الرسم:



موفقون انشاء الله