التاريخ 2014/11/30	**ثانوية بلحاج قاسم نور الدين**	**السنة الدراسية** : 2014ـ 2015
المستوى :3 **ثانوي تقني رياضي**	**الشلف**	**اختبار الثلاثي الأول**

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول ☹ : 08 نقاط

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $(E): y'+2y=3x^2-1$

1- برهن أنّه توجد دالة كثير حدود وحيدة p من الدرجة الثانية هي حل للمعادلة (E).

2- عين في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المعادلة التفاضلية: $(E'): y'+2y=0$.

3- برهن أنّ دالة g هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $(g-p)$ هي حل للمعادلة (E').

4- استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{R}$.

5- عين الحل g للمعادلة (E) و الذي يأخذ القيمة $\frac{9}{4}$ من أجل القيمة 0 للمتغير .

التمرين الثاني ☹ : 12 نقطة

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-1-2\ln(x)$

1- أدرس تغيرات الدالة g.

2- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\dfrac{1-(\ln x)^2}{x}$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2- برهن أنّ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

ب) بين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.3<\alpha<0.4$.

ج) أرسم (Δ)و (C_f).

5- نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $h(x)=f(-x)$

- اشرح كيفية رسم المنحني (C_h) انطلاقا من المنحني (C_f) ثم أرسم (C_h).

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ✿ أستاذ المادة

تصحيح الاختبار الأول نوفمبر 2014

الشعبة : تقني رياضي

ثانوية بلحاج قاسم نور الدين – الشلف

December 3, 2014

من أنجاز : الأستاذ ثابت إبراهيم

الإجابة	التنقيط
التمرين الأول : 08 نقاط لدينا : $(E): y'+2y=3x^2-1$	08 نقاط
1- تبيان أنّه توجد دالة وحيدة P كثير حدود من الدرجة الثانية حل المعادلة (E) : نفرض أنّ $P(x)=ax^2+bx+c$ P حل للمعادلة (E) يعني $P'(x)+2P(x)=3x^2-1$ ولدينا : $P'(x)=2ax+b$ إذن : $2ax+b+2ax^2+2bx+2c=3x^2-1$ أي $2ax^2+(2b+2a)x+b+2c=3x^2-1$ بالمطابقة نجد : $\begin{cases}2a=3\\2a+2b=0\\b+2c=-1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-a=-\frac{3}{2}\\2c=-1-b=-1+\frac{3}{2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-a=-\frac{3}{2}\\2c=\frac{1}{2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-\frac{3}{2}\\c=\frac{1}{4}\end{cases}$ وبالتالي $P(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ حل للمعادلة (E)	02
2- تعيين في $\mathbb{R}$ مجموعة حلول المعادلة التفاضلية: $(E'): y'+2y=0$: $y'+2y=0$ تكافئ $y'=-2y$ مجموعة حلول المعادلة (E') من الشكل $y=\lambda e^{-2x}$ حيث λ عدد حقيقي .	01
3- البرهان أنّ دالة g هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $(g-p)$ هي حل للمعادلة (E') : إذا كانت g هي حل للمعادلة (E) فإنّ $g'(x)+2g(x)=3x^2-1$ ومنه $g'(x)+2g(x)=P'(x)+2P(x)$ لانّ P حل للمعادلة (E) أي $g'(x)+2g(x)-P'(x)-2P(x)=0$ وبالتالي : $g'(x)-P'(x)+2g(x)-2P(x)=0$ أي $(g'-P')(x)+2(g-P)(x)=0$ **إذن $(g-p)$ حل للمعادلة (E')** إذا كانت $(g-p)$ حل للمعادلة (E') فإنّ $(g'-P')(x)+2(g-P)(x)=0$ ومنه $g'(x)-P'(x)+2g(x)-2P(x)=0$ أي $g'(x)+2g(x)=P'(x)+2P(x)$ وبالتالي : $g'(x)+2g(x)=3x^2-1$ **إذن g هي حل للمعادلة (E)**	01 + 01
4- استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{R}$: لدينا : $(g-p)(x)=\lambda e^{-2x}$ لانّ $(g-p)$ حل للمعادلة (E') ومنه : $g(x)=\lambda e^{-2x}+P(x)=\lambda e^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ أي $g(x)=\lambda e^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4},(\lambda\in\mathbb{R})$	01.5
5- تعيين الحل g للمعادلة (E) و الذي يأخذ القيمة $\frac{9}{4}$ من أجل القيمة 0 للمتغير:	

01.5	• لدينا : $g(x)=\lambda e^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4},(\lambda\in\mathbb{R})$ $g(0)=\frac{9}{4}$ معناه $\lambda e^{-2(0)}+\frac{3}{2}(0)^2-\frac{3}{2}(0)+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ ومنه $\lambda=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=\frac{9-1}{4}=2$ أي $\lambda=2$ ومنه $g(x)=2e^{-2x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$
12 نقطة	**التمرين الثاني:**
	I. لدينا : $g(x)=x^2-1-2\ln(x)$ $D_g=]0;+\infty[$
0.25 + 0.25	**1) دراسة تغيرات الدالة g :** • حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2-1-2\ln(x)\right)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-1-2\ln(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(x-\frac{1}{x}-2\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$
0.75	• **حساب المشتقة :** $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$ أي $g'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$
0.5	• **دراسة إشارة المشتقة :** إشارة المشتقة من نفس إشارة $2(x-1)(x+1)$ x | 0 | 1 | $+\infty$ $2(x-1)(x+1)$ | $-$ | 0 | $+$ $g'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | 0 | $+$
0.5	• **جدول تغيرات الدالة g :** x | 0 | 1 | $+\infty$ $g'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | 0 | $+$ $g(x)$ | $\|\|$ | $+\infty\searrow$ | 0 | $\nearrow+\infty$
0.5	**2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:** x | 0 | 1 | $+\infty$ $g(x)$ | $\|\|$ | $+$ | 0 | $+$ إذن من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $g(x)\geq0$
	II. لدينا : $f(x)=x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}$ $D_f=]0;+\infty[$
0.25 + 0.25	1- حساب $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}\right)=-\infty$ لأنَ $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-(\ln x)^2\right)=-\infty$ - التفسير الهندسي : $x=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f)
	2- البرهان أنَ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$: • نضع : $\sqrt{x}=t$ ومنه $x=t^2$ عندما $x\to+\infty$ فإنَ $t\to+\infty$

01

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln t^2)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(2\ln t)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{4(\ln t)^2}{t^2}=4\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$ إذن :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ أي $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ لأنَ

0.5

- **حساب** $\lim_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=+\infty$$

أي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

01

3- أ) تبيان أنَ : $f'(x)=\frac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$ **من أجل كل عدد حقيقي من المجال** $]0;+\infty[$ **:**

- لدينا :

$$f'(x)=1+\frac{-2\ln x\times\frac{1}{x}\times x-\left(1-(\ln x)^2\right)}{x^2}=1+\frac{-2\ln x-1+(\ln x)^2}{x^2}$$

أي $f'(x)=\frac{x^2-2\ln x-1+(\ln x)^2}{x^2}=\frac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$ ومنه

$$f'(x)=\frac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$$

01

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

* دراسة إشارة المشتقة : من نفس إشارة $g(x)+(\ln x)^2$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$(\ln x)^2$	‖	$+$	0	$+$	
$g(x)+(\ln x)^2$	‖	$+$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

0.5

- **جدول تغيرات الدالة** f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

0.5

4- أ) تبيان أنَ المستقيم (Δ) **ذي المعادلة** $y=x$ **مقارب مائل للمنحني** (C_f) **عند** $+\infty$ **:**

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) **بالنسبة إلى** (Δ) **:**

☜ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

- لدينا : $f(x)-y=x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}-x=\frac{1-(\ln x)^2}{x}$

0.5

$f(x)-y=0$ يعني $\dfrac{1-(\ln x)^2}{x}=0$

ومنه $1-(\ln x)^2=0$ و $x\neq 0$ أي $(\ln x)^2=1$

- إما $\ln x=1$ ومنه $x=e$ (مقبول لانَ $e\in]0;+\infty[$)
- أو $\ln x=-1$ ومنه $x=e^{-1}$ (مقبول لانَ $e^{-1}\in]0;+\infty[$)

0.75

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$	¦	$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$	¦	$+$	0	$-$	
$1-(\ln x)^2$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

0.75

ب) تبيان أنَ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.3<\alpha<0.4$:

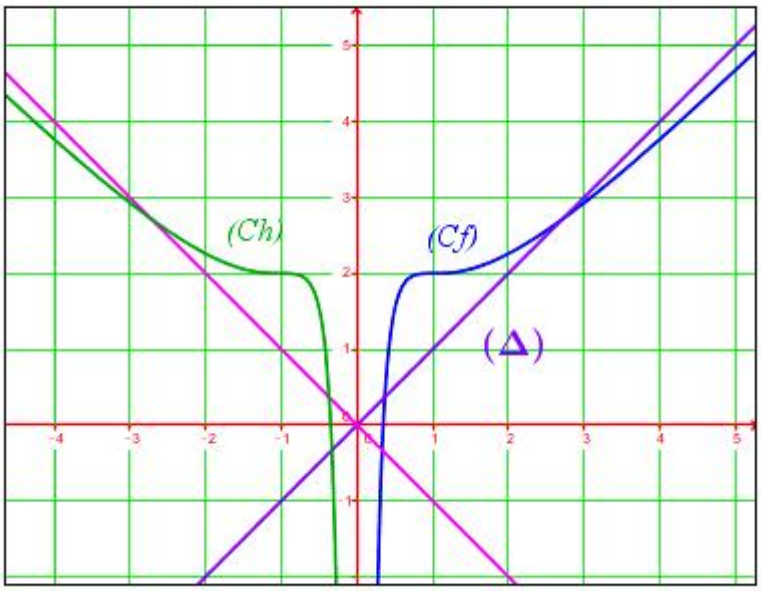
الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.3;0.4]$ ولدينا :

$f(0.3)=-0.2$ و $f(0.4)=0.08$ أي $f(0.3)\times f(0.4)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.3<\alpha<0.4$

01+01

ج) الرسم :



0.25

-5 لدينا : $h(x)=f(-x)$ $D_h=]-\infty;0[$

- **كيفية رسم المنحني (C_h) باستعمال المنحني (C_f) :**

لدينا : $h(x)=f(-x)$ يعني أنَ (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

بالتوفيق في البكالوريا دورة 2015