الشعبة : الثالثة ثانوي
علوم تجريبية 3ASS

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

فيفري 2010
المـــدة: 03سا

الموضوع الأول

التمرين الأول (06 نقاط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2\ln(x)$.

1) أ ـ ادرس تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$

ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة g .

2) أ ـ احسب $g(1)$ ثم حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

$g\left(\frac{1}{x}\right)<0$ ⊔ $x>1$

ب ـ استنتج أن :

$g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ ⊔ $0<x<1$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على R^* بما يلي : $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \quad ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(o\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) بين أن f دالة مستمرة في النقطة 0 على اليمين .

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين . ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟

3) ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) أ ـ بين أن : $f'(x)=x.g\left(\frac{1}{x}\right)$ مهما يكن $x\in\ ]0\ ;+\infty[$

ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $1<\alpha<2$.

6) أ ـ تحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=x$.

ب ـ بين انه لما $x\in\ ]0,1[$ فإن $f(x)>x$

ج ـ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T) .

7) أنشئ المنحنى (C) .

التمرين الثاني (06 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$(\Delta):\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R} \qquad (\Delta'):\begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} ;\alpha\in\mathbb{R}$$

1. بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .
2. A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ') .
   - عين إحداثيات النقطتين A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عمودياً على كل من (Δ) و (Δ')
   - أحسب الطول AB .
3. عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .
4. أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ما ذا تلاحظ ؟

التمرين الثالث (08 نقاط)

في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

$z_A=1-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=-3$ و $z_D=2$.

نعتبر التطبيق f الذي يرفق كل نقطة M ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث :

$z'=z^2-4.z$.

1. حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي .
2. أ ـ بين أن $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $z^2-3z+3=0$.

   ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$.
3. أ ـ عبر عن : $z'+4$ بدلالة $z-2$.

   ب ـ استنتج أن : $|z'+4|=|z-2|^2$ ثم عبر عن $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

ج ـ بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و نصف قطرها .

Dzlibrary.com

تصحيح إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

الجزء الأول :

تعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2\ln(x)$

أ- دراسة تغيرات الدالة g على $]0;+\infty[$

الدالة المشتقة $g'(x) = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

ب) جدول تغيرات الدالة g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖ +	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

حساب $g(1)$: $g(1) = -1 + 1 + 2\ln(1) = 0$

● إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ؛

لما : $0 < x < 1$ فإن $g(x) < 0$

و لما : $x > 1$ فإن $g(x) > 0$

$g(1) = 0 \quad \leftarrow \quad x = 1$

أ- استنتاج : لما : نقوم بتعميم النتيجة : $g(\frac{1}{x}) < 0 \quad \leftarrow \quad 0 < x < 1$ نضع $x = \frac{1}{X}$

نقوم بتعميم النتيجة : $g(\frac{1}{x}) > 0 \quad \leftarrow \quad x > 1$ نضع $x = \frac{1}{X}$

الجزء الثاني :

الدالة f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x) = x - x^2\ln x \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) بين أن f دالة مستمرة في النقطة 0 على اليمين . علما أن $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x - x^2\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x(1 - x\ln x)) = 0(1-0) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ و منه f دالة مستمرة على اليمين 0

2) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين .

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x - x^2\ln x) - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x - x^2\ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x(1 - x\ln x)}{x} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1 - x\ln x) = 1 \end{cases}$

● و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين النقطة 0 .

● التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها ؟ نقول أن المنحنى يقبل نصف مماس على اليمين النقطة 0 ميله 1

3) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - x^2\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - x\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(1 - x\ln x) = -\infty \end{cases}$

4) أ- تبيان أن : $f'(x) = x.g(\frac{1}{x})$ مهما يكن $x \in]0;+\infty[$

$\begin{cases} f'(x) = (x)' - (x^2\ln x)' = 1 - \left[(2x)\times\ln x + (x^2)\times(\frac{1}{x})\right] \\ f'(x) = 1 - [(2x)\times\ln x + x] = 1 - x - 2x\ln x = \\ f'(x) = 1 - x + 2x\ln x = x(\frac{1}{x} - 1 + 2\ln x) = x(\frac{1}{x} - 1 + 2\ln\frac{1}{x}) \\ f'(x) = x.g(\frac{1}{x}) \end{cases}$

ب - جدول تغيرات الدالة f . إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(\frac{1}{x})$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	0	−
$f(x)$	0	↗ 1 ↘	$-\infty$

5) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ و أن $1 < \alpha < 2$.

● الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي مستمرة على المجال $]1;2[$

● الدالة f رتيبة (متزايدة تماما) على المجال $]1;2[$

● و أن : $f(1) = 1 > 0$ مع $f(2) = -0{,}77 < 0$ و $f(2) \times f(2) < 0$

و منه حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;2[$

6) أ- التحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y = x$.

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

معادلة المماس : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1.(x-0) + 0$

$y = x$

ب - تبيان أنه لما $x \in]0;1[$ فإن $f(x) > x$

نعلم أنه لما : $1 > x > 0 \quad \leftarrow \quad Ln(x) < 0 \quad \leftarrow \quad x^2.Ln(x) < 0$

$-x^2.Ln(x) > 0 \quad \leftarrow \quad 1 > x > 0$

$x - x^2.Ln(x) > x \quad \leftarrow \quad 1 > x > 0$

و منه $f(x) > x \quad \leftarrow \quad 1 > x > 0$

ج - الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T)

لدينا بما سبق $f(x) > x \quad \leftarrow \quad 1 > x > 0$ أي $f(x) - x > 0$

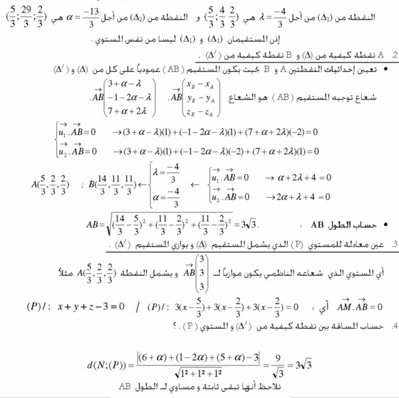
و من جهة : $x > 1 \quad \leftarrow \quad Ln(x) > 0 \quad \leftarrow \quad x^2.Ln(x) > 0$

$-x^2.Ln(x) < 0 \quad \leftarrow \quad x > 1$

و منه نستنتج أن المنحنى (C) فوق المماس (T) $\quad \leftarrow \quad f(x) - x < 0$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-x$	‖ +	0 −	
الوضع النسبي	(C) فوق (T)	(C) تحت (T) يقطع	

7) المنحنى (C) :



التمرين الثاني

$(\Delta): \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbf{R}$ و $(\Delta'): \begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbf{R}$

1. تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوى .

$\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا . $\vec{u_1}\begin{pmatrix}+1\\+\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$ و $\vec{u_2}\begin{pmatrix}+1\\-2\\+1\end{pmatrix}$. $1 \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{+\frac{1}{2}}{-2}$

النقطة من (Δ_1) من أجل $\lambda = \frac{-4}{3}$ هي $A(\frac{5}{3};\frac{4}{3};\frac{2}{3})$ و النقطة من (Δ_2) من أجل $\alpha = \frac{-13}{3}$ هي $(\frac{5}{3};\frac{29}{3};\frac{2}{3})$

إذن المستقيمان (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوى .

حل الجملة $\begin{cases} 6+\alpha = 3+\lambda \\ 5+\alpha = -2-2\lambda \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} \lambda = \frac{-4}{3} \\ \alpha = \frac{-13}{3} \end{cases}$

2. A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ') .

● تعيين إحداثيات النقطتين A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .

شعاع توجيه المستقيم (AB) هو الشعاع $\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$ أي $\vec{AB}\begin{pmatrix}3+\alpha-\lambda\\-1-2\alpha-\lambda\\7+\alpha+2\lambda\end{pmatrix}$

$\begin{cases} \vec{u_1}.\vec{AB} = 0 \\ \vec{u_2}.\vec{AB} = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} (3+\alpha-\lambda)(1) + (-1-2\alpha-\lambda)(-2) + (7+\alpha+2\lambda)(1) = 0 \\ (3+\alpha-\lambda)(1) + (-1-2\alpha-\lambda)(-2) + (7+\alpha+2\lambda)(2) = 0 \end{cases}$

$\leftarrow \begin{cases} \vec{u_1}.\vec{AB} = 0 \\ \vec{u_2}.\vec{AB} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\lambda + 4 = 0 \\ 2\alpha + \lambda + 4 = 0 \end{cases}$

$\leftarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-4}{3} \\ \alpha = \frac{-4}{3} \end{cases}$ نضع $B(\frac{14}{3};\frac{11}{3};\frac{11}{3})$ و $A(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3})$

● حساب الطول AB : $AB = \sqrt{(\frac{14}{3}-\frac{5}{3})^2 + (\frac{11}{3}-\frac{2}{3})^2 + (\frac{11}{3}-\frac{2}{3})^2} = 3\sqrt{3}$.

3. عين معادلة للمستوى (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ').

أي المستوي الذي شعاعه الناظمي يكون موازيا لـ $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ و يشمل النقطة $A(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3})$ مثلا

$(P)/: x + y + z - 3 = 0$ / $(P)/: 3(x-\frac{5}{3}) + 3(x-\frac{2}{3}) + 3(x-\frac{2}{3}) = 0$ أي : $\vec{AM}.\vec{AB} = 0$

4. حساب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوى (P) ؟

$d(N;(P)) = \frac{|(6+\alpha) + (1-2\alpha) + (5+\alpha) - 3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

نلاحظ أنها تبقى ثابتة و مساوي لـ الطول AB

التمرين الثالث

1. تحديد A' و B' صور النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي

$z' = z^2 - 4z$

1. $z_A = 1 - i \rightarrow z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) = -2i - 4 + 4i = -4 + 2i$

2. $z_B = 3 + i \rightarrow z_{B'} = 9 + 6i - 1 - 12 - 4i = -4 + 2i$.

2. أ- تبيان أن $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $z^2 - 3z + 3 = 0$

ب - تحديد مجموعة النقط M بحيث يكون $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $\vec{OM} = \vec{M'C}$ أو الأفضل مناسبته

أي : $z_C - 3 = -z_C^2 - 4z_C + 4$ ومنه $z^2 - 3z + 3 = 0$ ، وبالتالي : $z_C = -z + 3$

ج - حل في المجموعة $\mathbf{C}$ المعادلة : $z^2 - 3z + 3 = 0$

المميز $\Delta = 9 - 12 = -3 = 3i^2$ ومنه نجد : $z_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. أ- نعبر عن $z'+4$ بدلالة $z-2$

$z'+4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

ب - استنتاج أن : $|z'+4| = |z-2|^2$ ثم نعبر عن $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$

$\begin{cases} |z'+4| = |z-2|^2 \\ \arg(z'+4) = 2\arg(z-2) + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow (z'+4) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$

ج - تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 فإن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها H و نصف قطرها 4 .

صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة بمنعكس خديد مركزها و نصف قطرها

إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 هذا يعني : $|z_C - z_D| = 2$ أي : $|z_C - 2| = 2$

بتربيع الطرفين : $|z_C - 2|^2 = 2^2 = 4$ أي : $|z_C - 2|(z_C - 2)^* = 4$.

و منه النقطة M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة $H(4;0)$ و نصف قطرها R

Dzlsrael.com