



السنة الدراسية 2025 – 2026

3 علوم تجريبية

فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المدة : 1 سا

التمرين 01 : (05 ن)

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ: } u_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{6 + 6u_n}{5 + u_n}$$

$$(1) \text{ تحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = 6 - \frac{24}{5 + u_n}$$

$$(2) \text{ أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 \leq u_n \leq 3$$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

$$(3) (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 3}$$

$$\text{أ) أثبت أن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } \frac{8}{3} \text{ ثم اكتب عبارة } v_n \text{ بدلالة } n$$

$$\text{ب) بين أنه: من أجل عدد طبيعي } n, u_n = 3 - \frac{5}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right)^n + 1} \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$(4) \text{ احسب المجموع } S_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث: } S_n = v_0 + 3 \times v_1 + 3^2 \times v_2 + \dots + 3^n \times v_n$$

التمرين 02 : (05 ن)

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2 - n$.

$$(1) \text{ بين أن المتتالية } (u_n) \text{ حسابية يطلب تعيين أساسها } r \text{ وحدها الأول } u_0.$$

$$(2) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ نضع: } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\text{أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: S_n = \frac{-n^2 + 3n + 4}{2}$$

$$\text{ب- عين قيمة العدد الطبيعي } n \text{ حيث: } S_n = -126753$$

$$(3) \text{ المتتالية العددية } (v_n) \text{ حدودها موجبة تماما ومن أجل عدد طبيعي } n: u_n = \ln(v_n)$$

$$\text{- اكتب عبارة الحد العام } v_n \text{ بدلالة } n \text{ ثم بين أن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } e^{-1}.$$

الإجابة النموذجية

التمرين 01:

(1) من أجل كل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1} = \frac{6+6u_n}{5+u_n} = \frac{6(5+u_n)-24}{5+u_n} = 6 - \frac{24}{5+u_n}$ وهو

المطلوب

(2) أ- $P(n)$ الخاصية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3$ $P(n)$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 0$ و $0 \leq 0 \leq 3$ إذن $0 \leq u_0 \leq 3$ ومنه $P(0)$ صحيحة.....(*)

نفرض صحة $P(n)$ من أجل n عدد طبيعي كفي و نبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا من أجل n كفي: $0 \leq u_n \leq 3$ ومنه $5 \leq 5+u_n \leq 8$ ومنه $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{5+u_n} \leq \frac{1}{5}$ ومنه

$\frac{-24}{5} \leq \frac{-24}{5+u_n} \leq \frac{-24}{8}$ ومنه $6 - \frac{24}{5+u_n} \leq 6 - \frac{24}{8}$ ومنه $\frac{6}{5} \leq u_{n+1} \leq 3$ بالتعدي

$0 \leq u_{n+1} \leq 3$ صحيحة.....(**)

من (*) و (**) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل n عدد طبيعي $P(n)$ صحيحة

ب- من أجل كل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 6}{5+u_n}$ ومن بما أن $0 \leq u_n \leq 3$ فإن

$u_{n+1} - u_n > 0$ أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

بما أن المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 ($u_n \leq 3$) فهي متقاربة.

(3) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} - 3} = \frac{\frac{6+6u_n}{5+u_n} + 2}{\frac{6+6u_n}{5+u_n} - 3} = \frac{8u_n + 16}{3u_n - 9}$ ومنه:

$v_{n+1} = \frac{8}{3} \left(\frac{u_n + 2}{u_n - 3} \right) = \frac{8}{3} v_n$ أي أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{8}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -\frac{2}{3}$

من أجل كل n عدد طبيعي لدينا: $v_n = -\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n$

ب- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 3} = \frac{u_n - 3 + 2 + 3}{u_n - 3}$ ومنه:

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 3} + \frac{5}{u_n - 3}$$

$$\text{ومنه } v_n = 1 + \frac{5}{u_n - 3} \text{ ومنه } v_n - 1 = \frac{5}{u_n - 3} \text{ ومنه } \frac{1}{v_n - 1} = \frac{u_n - 3}{5} \text{ ومنه } \frac{5}{v_n - 1} = u_n - 3$$

$$\text{ومنه } \frac{5}{v_n - 1} + 3 = u_n \text{ ومنه } u_n = 3 + \frac{5}{-\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1} \text{ ومنه } u_n = 3 - \frac{5}{\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n + 1} \text{ وهو المطلوب}$$

$$\text{لدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^n = +\infty \text{ لأن } \frac{8}{3} > 1 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^n + 1}\right) = 0 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

$$(4) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ لدينا: } 3^n \times v_n = -\frac{2}{3}\left(\frac{8^n}{3^n}\right) \times 3^n \text{ ومنه } 3^n \times v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)8^n$$

$$\text{إذن: } S_n = v_0 + 3 \times v_1 + 3^2 \times v_2 + \dots + 3^n \times v_n \text{ أي}$$

$$S_n = -\frac{2}{3}(1 + 8 + 8^2 + \dots + 8^n) \text{ ومنه } S_n = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 8^1 - \frac{2}{3} \times 8^2 + \dots - \frac{2}{3} \times 8^n$$

$$\text{ومنه } S_n = -\frac{2}{21}(8^{n+1} - 1) \text{ أي } S_n = -\frac{2}{3}\left(\frac{8^{n+1} - 1}{8 - 1}\right)$$

التمرين 02:

(1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} - u_n = -1$ ، المتتالية (u_n) حسابية أساسها -1 وحدها

$$u_0 = 2 \text{ الأول}$$

(2) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ومنه $S_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(u_0 + u_n)$ أي

$$S_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(2 + 2 - n) \quad \text{أي} \quad S_n = \frac{(n+1)(4-n)}{2} \quad \text{أي} \quad S_n = \frac{-n^2 + 3n + 4}{2} \quad \text{وهو المطلوب}$$

ب- من أجل n عدد طبيعي لدينا $S_n = -126753$ تكافئ $\frac{-n^2 + 3n + 4}{2} = -126753$ أي

$$-n^2 + 3n + 253510 = 0 \quad \text{ومنه} \quad n = 505$$

(3) من أجل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = \ln(v_n)$ تكافئ $v_n = e^{u_n} = e^{2-n}$ ولدينا $v_{n+1} = e^{-1}v_n$ أي أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-1} وحدها الأول $v_0 = e^2$