Email: saitameur3@gmail.com 023 71 54 67 :فاكس 023 71 54 63 / 0550 47 22 35 :رقم الهاتف

3 رياضي	السنة الدراسية 2025 – 2026

فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المدة : 1 سا

التمرين 01 : (05 ن)

1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2$ (حيث e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$

أ- احسب الحدين u_1 و u_2 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $4 < u_n \leq e^2$

ت- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n) - 2\ln 2$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ب- استنتج كتابة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

ب- استنتج بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$

التمرين 02 : (05 ن)

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
(وحدة الطول $2cm$)

1) الدالة H معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$.

أ- بين أن H دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب- احسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم $(\Delta): y = x$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 0$.

الإجابة النموذجية

التمرين 01:

1) أ- $u_1 = 2e$ و $u_2 = 2\sqrt{2e}$ و $u_2 < u_1$ نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ب- البرهان بالتراجع أن من أجل كل n عدد طبيعي: $4 < u_n \leq e^2$

ج- من أجل كل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{u_n} - u_n = \dfrac{u_n(4-u_n)}{2\sqrt{u_n}+u_n}$ (الضرب والقسمة في المرافق)

بما أن $4 < u_n \leq e^2$ فإن $4 - u_n < 0$ و $2\sqrt{u_n} + u_n > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ أي أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

2) أ- من أجل كل n عدد طبيعي لدينا: $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2\ln 2 = \ln\left(2\sqrt{u_n}\right) - 2\ln 2$ ومنه:

$v_{n+1} = \ln(2) + \ln\left(\sqrt{u_n}\right) - 2\ln 2 = \dfrac{1}{2}\ln(u_n) - \ln 2$ ومنه

$v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\ln(u_n) - 2\ln 2\right) = \dfrac{1}{2}v_n$ ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$v_n = (2 - 2\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ب- من أجل كل n عدد طبيعي لدينا: $u_n = 4e^{(2-2\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

3) $S_n = (4 - 4\ln 2)\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ ، $P_n = 4^{n+1}e^{(4-4\ln 2)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$

التمرين 02:

1) أ- من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $H'(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ ومنه الدالة H دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$

ب- من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f(x) - x = -(x+1)^2 e^{-x}$ أي $f(x) - x \leq 0$ ومنه:

$A = \int_{-1}^{0} (x - f(x))dx$ أي $A = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-x} dx$ أي $A = [H(0) - H(-1)] \times 4cm^2$

ومنه

$A = (8e - 20)cm^2$ أي: $A \approx 1.74cm^2$.