الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: 3 ثانوي "ع.ت" المادة: رياضيات	**فرض** **الفصل الثالث**	الموسم الدراسي: 2024/2025م المدة: (2سا و 30د) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (06نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوي التي لاحقاتها: $z_A=2-2i$ ، $z_B=1+3i$ و $z_C=-3-3i$.

1) اكتب على الشكل الجبري العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثم بيّن أنّ: $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$، واستنتج طبيعة المثلث ABC.

2) بيّن أنّ: $\left(\dfrac{z_A+z_B+z_C+2}{2\sqrt{2}}\right)^{2025}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

3) أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D بحيث: $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=2$، ثم استنتج أنّ النقط A ، B و D في استقامية.

ب) لتكن النقطة E نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة A. بيّن أنّ لاحقة النقطة E هي $z_E=7-i$.

4) أ) ماذا يمكن قوله عن القطعتين [CE] و [BD]؟ استنتج طبيعة الرباعي BCDE ثم مثّله.

ب) عيّن وأنشئ المجموعة Γ للنقط M من المستوي التي تحقّق: $\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

تمرين2 (05نقاط)

يحتوي كيس على 4 كريات سوداء تحمل الأرقام التالية: 4، 2، 0، 2 و4 كريات بيضاء تحمل الأرقام التالية: 5، 4، 4، 1.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد من هذا الكيس كريتين. كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

1) احسب p_1 احتمال أن يكون رقمي الكريتين المسحوبتين زوجيين.

2) بيّن أنّ احتمال أن تكون القيمة المطلقة للفرق بين رقمي الكريتين المسحوبتين معدوما هو $p_2=\dfrac{1}{7}$.

3) نُعرّف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين المحصل عليهما.

برّر أنّ قيم X هي: $\{0;1;2;3;4;5\}$، ثم عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

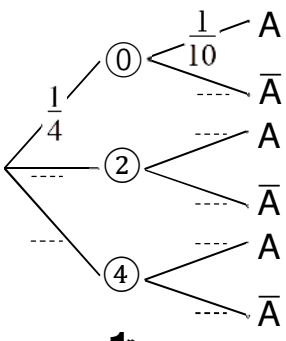
4) نضع الآن الكريات السوداء في الكيس U_1 والكريات البيضاء في الكيس U_2. في التجربة الأولى نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس U_1 نضعها في الكيس U_2 ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا وفي آن واحد كريتين. وفي التجربة الثانية نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس U_2 نضعها في الكيس U_1 ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا وفي آن واحد كريتين.

نعتبر الحادثة A: الكريتان المسحوبتان تحملان نفس الرقم.

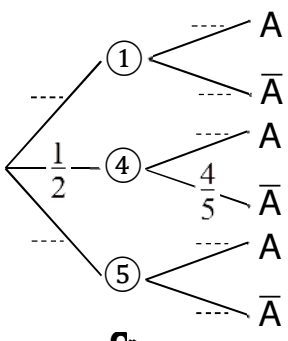
أ) انقل ثم أكمل شجرتي الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه العملية من أجل كل تجربة.

ب) احسب $p(\overline{A})$ احتمال سحب كريتان تحملان رقمين مختلفين من أجل كل تجربة.

(تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)



تجربة1



تجربة2

تمرين3 (09نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;\,e^{\frac{5}{2}}]$ بـ: $f(x)=2\ln x-(\ln x)^2$.

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الطول $1cm$.

1) بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;\,e^{\frac{5}{2}}]$: $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات f.

ب) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=-2$ ؟ لا يطلب حساب الحلول.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

3) أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 1.

ب) حل على المجال $]0\,;\,e^{\frac{5}{2}}]$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ج) أنشئ المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$.

4) نعتبر التكاملين التاليين: $I=\int_e^{e^2}\ln x\,dx$ و $J=\int_e^{e^2}(\ln x)^2\,dx$

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ: $I=e^2$ و $J=2e^2-e$.

ب) احسب مساحة الحيّز $\mathscr{A}$ المحدّد بـ$(\mathscr{C})$، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=e$ و $x=e^2$.

5) h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;\,e^{\frac{5}{2}}]$ بـ: $h(x)=|f(x)|$. $(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) اكتب h دون رمز القيمة المطلقة، ثم ارسم بيانها مع الشرح.

ب) m وسيط حقيقي موجب. عيّن قيم m حتى تقبل المعادلة $(f(x))^2=m$ أربعة حلول متمايزة.

6) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=e$ و $u_{n+1}=[f(u_n)]^2+1$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le e$.

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\le u_n$. استنتج أنّ (u_n) متقاربة نحو 1.

بالتوفيق

تصحيح فرض الفصل الثالث 2025

تمرين 1: "عبد المطلب"

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-5-i}{-1+5i} = \frac{i(5i-1)}{-1+5i} = i$ (1

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$: أي $\sin\theta = 1$ و $\cos\theta = 0$ $\quad |i| = 1$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين

$$\begin{cases} \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\frac{z_A + z_B + z_C + 2}{2\sqrt{2}} = \frac{2-2i}{2\sqrt{2}} = 1 e^{i(-\frac{\pi}{4})}$ (2

$\left[e^{i(-\frac{\pi}{4})}\right]^{2025} = e^{i(-\frac{2025\pi}{4})} = e^{i(-\frac{2024\pi}{4} - \frac{\pi}{4})}$ ($2024\pi = 2k\pi$)

$\left(\frac{z_A + z_B + z_C + 2}{2\sqrt{2}}\right)^{2025} = e^{i(-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_D = 2(z_A - z_B) + z_B = 3 - 7i$ و $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = 2$ (P (3

$(\vec{BA}, \vec{BD}) = 2k\pi$ أي $\arg(2) = 2k\pi$

ومنه: A, B, D في استقامية $(\vec{BD} = 2\vec{BA})$ و

ب) $z_A = \frac{z_C + z_E}{2}$ ومنه: $z_E = 2z_A - z_C = 7 - i$

4) P) $\frac{z_C + z_E}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = z_A$: $[BD]$ و $[CE]$ (متناصفتان)

سابقا: $(AB) \perp (AC)$ أي $[BD] \perp [CE]$ (متعامدتان)

و $AB = AC$ أي $[BD] = [CE]$ (متقايستان)

ومنه: BCDE مربع.

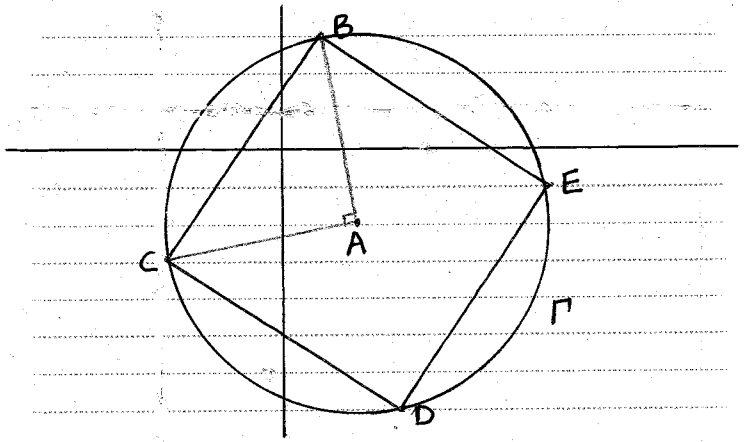
ب) $\|\vec{MC} + \vec{ME}\| = 2\|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

$\|\vec{MA} + \vec{AC} + \vec{MA} + \vec{AE}\| = 2\|\vec{BM} + \vec{MA}\|$

$\|2\vec{MA} + \vec{AC} + \vec{AE}\| = 2\|\vec{BA}\|$

$\|2\vec{MA} + \vec{0}\| = 2\|\vec{BA}\|$ $\quad AM = AB$

Γ هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AB أي تشمل B.



تمرين 2:

1) $P_1 = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28}$ $\quad (0, 2, 2, 4, 4, 4)$

2) $P_2 = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{1}{7}$ $\quad (2-2 = 4-4 = 0)$

3) $P(X=0) = P_2 = \frac{1}{7}$ $\quad (2-2 = 4-4 = 0)$

$P(X=1) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{3}{14}$ $\quad (5-4 = 2-1 = 1-0 = 1)$

$P(X=2) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{2}{7}$ $\quad (4-2 = 2-0 = 2)$

$P(X=3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{5}{28}$ $\quad (5-2 = 4-1 = 3)$

$P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{1}{7}$ $\quad (5-1 = 4-0 = 4)$

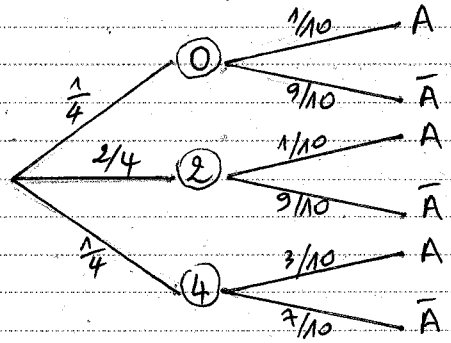
$P(X=5) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{1}{28}$ $\quad (5-0 = 5)$

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$

$E(X) = \sum_{k=0}^{5} k P(X=k) = \frac{29}{14}$

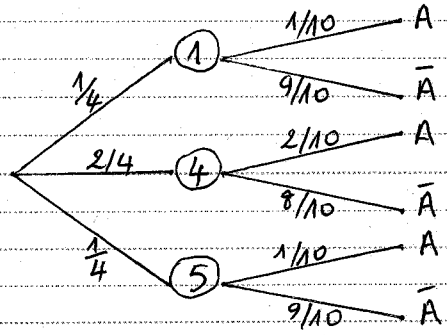
ب) و P (4

تجربة 1:



$P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{17}{20}$

تجربة 2:



$P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{4} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{17}{20}$

تمرين 3:

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2\ln x - (\ln x)^2) = -\infty - \infty = -\infty$

مستقيم مقارب عمودي : $x=0$

2) $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x}\ln x = \frac{2-2\ln x}{x}$

$-\ln x > -1$ ب $2-2\ln x > 0$

و منه : $\ln x < 1$ ب $0 < x < e$

$0 < x \leq e$ ب $f'(x) \geq 0$.

$e < x \leq e^{5/2}$ ب $f'(x) < 0$.

x	0		e		$e^{\frac{5}{2}}$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\frac{5}{4}$

ب) $f(x) = -2$ ، $x \in [e, e^{\frac{5}{2}}]$ ب تقبل حلول

و لما $f(x) = -2$ ، $x \in]0; e[$ تقبل حلا وحيدا

لأن f مستمرة ومتزايدة تماما و $f(e) = 1 > 0$

و $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. (مبرهنة القيم المتوسطة)

ج) $f''(x) = \frac{-2-(2-2\ln x)}{x^2} = \frac{-4+2\ln x}{x^2}$

$f''(x) = 0$ ب $\ln x = 2$ أي $x = e^2$

f'' تنعدم و تغير إشارتها

$- \overset{e^2}{\oplus} +$ ←

النقطة هي : $w(e^2; f(e^2))$ أي $w(e^2; 0)$

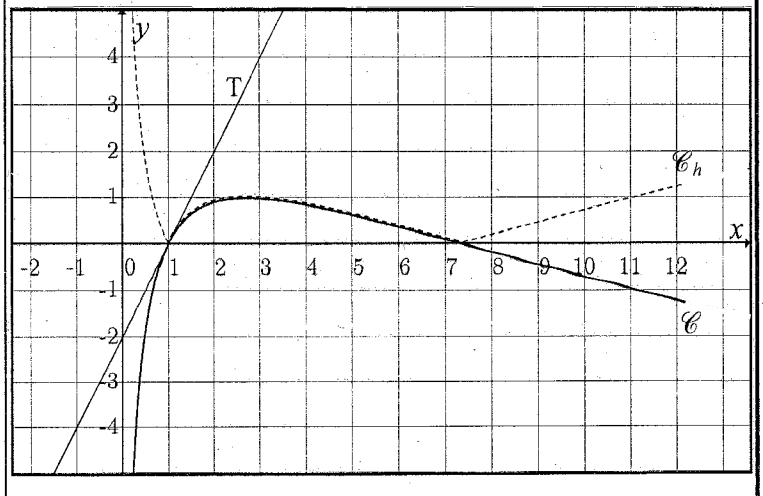
3) $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2x-2$

ب) $f(x) = 0$: $\ln x(2-\ln x) = 0$

$\ln x = 0$: $x=1$ و $\ln x = 2$ ؛ $x = e^2$

تمثل فاصلتي نقطتي تقاطع $(\mathcal{C})$ مع (Ox).

ج) رسم $(\mathcal{C})$ ، المماس (T) و المنحنى $(\mathcal{C}_h)$.



4) $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$ ↑ ↙ $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$I = [x\ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx = [x\ln x - x]_e^{e^2} = e^2$

$\begin{cases} u'(x) = \frac{2\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$ ↑ ↙ $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$J = [x(\ln x)^2]_e^{e^2} - 2\int_e^{e^2} \ln x\, dx$

$J = 4e^2 - e - 2I = 2e^2 - e$

ب) $A = \int_e^{e^2} f(x)\, dx = 2I - J = e$ u.a

5) إشارة $f(x)$:

$- \overset{1}{\oplus} + \overset{e^2}{\oplus} -$ →

$h(x) = f(x)$: $f(x) \geqslant 0$ ، $x \in [1, e^2]$

$(\mathcal{C}_h)$ يطابق $(\mathcal{C})$.

$h(x) = -f(x)$: $f(x) < 0$ ، $x \in]0,1[\cup]e^2, e^{\frac{5}{2}}]$

$(\mathcal{C}_h)$ يناظر $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ (Ox).

ب) $|f(x)| = \sqrt{m}$ يعني : $[f(x)]^2 = m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C}_h)$ مع المستقيمات الأفقية $y = \sqrt{m}$

و منه $0 < \sqrt{m} < 1$: حلول متمايزة 4

$0 < m < 1$

6) $\underline{n=0}$: $u_0 = e$ ، $1 \leqslant u_0 \leqslant e$ (محققة)

نفرض أن $1 \leqslant u_n \leqslant e$ من أجل n كيفي و نبرهن صحة : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant e$.

لدينا : $1 \leqslant u_n \leqslant e$

و f متزايدة على $[1;e]$ ب $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(e)$

$0 \leqslant f(u_n) \leqslant 1$ ، $0 \leqslant [f(u_n)]^2 \leqslant 1$

أي $1 \leqslant [f(u_n)]^2 + 1 \leqslant 2 \leqslant e$ أي $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant e$

و منه : $1 \leqslant u_n \leqslant e$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ب) نبرهن بالتراجع : $u_{n+1} \leqslant u_n$

$\underline{n=0}$: $u_0 = e$ و $u_1 = 2$ ، $u_1 \leqslant u_0$ (محققة)

نفرض صحة $u_{n+1} \leqslant u_n$ من أجل n كيفي

و نبرهن صحة $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. لدينا $u_{n+1} \leqslant u_n$

$f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$: $[f(u_{n+1})]^2 \leqslant [f(u_n)]^2$

$[f(u_{n+1})]^2 + 1 \leqslant [f(u_n)]^2 + 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \leqslant u_n$: و منه $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

(u_n) متناقصة و محدودة من 1 إذن فهي متقاربة نحو عدد ℓ حيث $1 \leqslant \ell \leqslant e$ ؛ $\ell = [f(\ell)]^2 + 1$ ؛ $[f(\ell)]^2 = \ell - 1$

لدينا : $f(\ell) = 0$ ب $\ell = 1$ و منه $\ell = 1$ "عند المطلب"