ثانوية : بوعزيز ربيعة (الياسمين) | الفرض الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات | السنة الدراسية : 2024 / 2025

القسم : 3 رياضيات | المدة : ساعتان

التمرين الأول (06 نقط) :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_1 = e^{-1}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{en} u_n$.

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n > 0$.

ب) قارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 ، ثم استنتج اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N^* ، $v_n = \frac{1}{en} u_n$ ، بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3) جد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، ثم استنتج عبارة u_n و أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3} + \ldots\ldots + \frac{u_n}{v_n}$.

5) أحسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_1 \times u_2 \times \ldots\ldots \times u_n)$.

التمرين الثاني (05 نقط) :

نعتبر التكاملين J و I حيث : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx$ و $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{x}}{e^{2x}-1} dx$.

1) بين أن : $I = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.

2) أحسب $I - J$ ، ثم استنتج قيمة J.

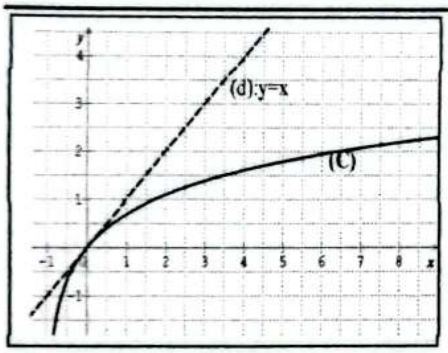
3) n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ ، نعتبر العدد الحقيقي K_n المعرف كما يلي : $K_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{-x}.\ln\left(e^{2x}-1\right)dx$.

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب العدد K_2 .

4) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أن ، $\frac{2e^x}{e^{2x}-1} = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = K_2 + K_3 + \ldots\ldots + K_n$ ، ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين الثالث (09 نقط) :



(I) (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(1+x)$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. كما هو موضح في الشكل المقابل

بقراءة بيانية ، برر أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $0 < \ln(1+x) < x$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R ب : $f(x) = \ln(e^{2x} + e^{-x})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$. ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = 2x + \ln(1+e^{-3x})$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .

3) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') يطلب تعيين معادلته .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيمين (Δ) و (Δ') .

5) أنشئ (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

6) λ عدد حقيقي موجب تماما ، $A(\lambda)$ المساحة المحددة بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 0$ و $x = \lambda$.

بين أن : $A(\lambda) < \frac{1}{3}$.

7) الدالة العددية h المعرفة على R ب : $h(x) = f(|x|-1)+1$ و (C_h) منحناها البياني في المعلم السابق .

أ) بين أن الدالة h زوجية . ب) اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم أرسمه.

انتهى بالتوفيق

التمرين (06) (ن)

$u_{n+1} = \frac{n+1}{e^n} u_n$: $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_1 = e^{-1}$

$u_n > 0$: $n \in \mathbb{N}^*$ من أجل كل ⓒ ①

البرهان بالتراجع : نتحقق من أجل $n=1$:

$u_1 > 0$ أي $e^{-1} > 0$ محققة

نفرض أن $u_n > 0$ من أجل n كيفي، ونبرهن أن $u_{n+1} > 0$

لدينا $\frac{n+1}{e^n} > 0$ ، $u_n > 0$

$\frac{n+1}{e^n} u_n > 0$ أي

$u_{n+1} > 0$

$u_n > 0$: $n \in \mathbb{N}^*$ من أجل كل

ب.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n+1}{e^n} - 1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{(1-e)n+1}{e^n}$

$(1-e)n+1 < 0$ ، $e^n > 0$ أي $n \geq 1$ من أجل

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$ أي

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$u_n > 0$ من أجل كل

$u_{n+1} < u_n$

المتتالية (u_n) كل

المتتالية (u_n) متقاربة

وجود ما الأسئل ب 0 حصر

متقاربة حسب مبرهنة

ج.

$v_n = \frac{1}{e^n} u_n$ ، $n \in \mathbb{N}^*$

$v_{n+1} = v_n \times q$: $n \in \mathbb{N}^*$ من أجل كل (v_n) متتالية هندسية

$v_{n+1} = \frac{1}{e(n+1)} u_{n+1}$

$v_{n+1} = \frac{1}{e(n+1)} \times \frac{n+1}{e^n} u_n$

$v_{n+1} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^n} u_n = \frac{1}{e} v_n$

$q = \frac{1}{e}$ لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها

$v_1 = \frac{1}{e} u_1 = \frac{1}{e^2} u_1$ حدها الأول

$v_n = v_1 \times q^{n-1}$: $n \in \mathbb{N}^*$ من أجل كل ③

$v_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$

د.

$T_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \cdots + \frac{u_n}{v_n}$ ④

$\frac{u_n}{v_n} = e^n$ لدينا

$T_n = e(1+2+3+\cdots+n)$

$T_n = \frac{e}{2} n(n+1) = \frac{e(n^2+n)}{2}$

$P_n = \ln(u_1 \times u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_n)$ ⑤

$P_n = \ln\left(\frac{1}{e} \times \frac{2}{e^2} \times \frac{3}{e^3} \times \cdots \times \frac{n}{e^n}\right)$

$P_n = \ln\left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}{e^{1+2+3+\cdots+n}}\right)$

$P_n = \ln(n!) - \ln\left(e^{\frac{n}{2}(n+1)}\right)$

$P_n = \ln(n!) - \frac{n}{2}(n+1)$

$P_n = \ln(n!) - \frac{n^2+n}{2}$

0,5 ن

$$S_n = \left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} + \int_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} \left(\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx$$

$$S_n = \left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1) + \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right]_{\ln(2)}^{\ln(n+1)}$$

$$S_n = -\frac{1}{n+1}\ln(n^2+2n) + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{3}{2}\ln(3)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n+2)}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{3}{2}\ln(3)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{n+1}\times\frac{\ln(n)}{n} - \frac{n+2}{n+1}\times\frac{\ln(n+2)}{n+2} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{3}{2}\ln(3)\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}\ln(3)$$

$$K_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\,dx \quad (3)$$

$$K_2 = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\,dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(e^{2x}-1) \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$K_2 = \left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)} + \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{2e^x}{e^{2x}-1}\,dx$$

$$K_2 = -\frac{1}{3}\ln(8) + \frac{1}{2}\ln(3) + 2J$$

$$K_2 = -2\ln(2) + \frac{3}{2}\ln(3)$$

$$\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

$$S_n = K_2 + K_3 + \cdots + K_n \quad (4)$$

$$S_n = \int_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\,dx$$

$$S_n = \left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} + \int_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} \frac{2e^x}{e^{2x}-1}\,dx$$

التمرين (02) (06 نقاط)

$$I = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\ln(8) - \ln(3)\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left(3\ln(2) - \ln(3)\right) = \frac{3}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3)$$

$$I - J = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1}\,dx \quad (2)$$

$$I - J = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)}\,dx$$

$$I - J = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$I - J = \left[\ln(e^x+1)\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)}$$

$$I - J = \ln(4) - \ln(3) = 2\ln(2) - \ln(3)$$

$$J = I - 2\ln(2) + \ln(3)$$

$$J = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

التمرين (03) (06 ن)

I) من الرسم أن من أجل كل x من $]0,+\infty[$ المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (d) ومعادلته $y=x$ والعلاقة $0<\ln(1+x)<x$ تكافئ $x>0$

II) $f(x)=\ln(e^{2x}+e^{-x})$, $D_f=\mathbb{R}$

1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^{-x}}{e^{2x}+e^{-x}}\times\frac{e^{x}}{e^{x}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$$

ج) إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن $e^{3x}+1>0$

$f'(x)\geq 0$ تكافئ

$2e^{3x}-1\geq 0$

$e^{3x}\geq\frac{1}{2}$

$3x\geq -\ln(2)$

$x\geq\frac{-\ln(2)}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{-\ln(2)}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,\frac{-\ln(2)}{3}]$

f متزايدة تماما على المجال $[\frac{-\ln(2)}{3},+\infty[$

x	$-\infty$	$\frac{-\ln(2)}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\ln(0,63)$	↗ $+\infty$

2) $f(x)=\ln(e^{2x}+e^{-x})$

$f(x)=\ln\left[e^{2x}(1+e^{-3x})\right]$

$f(x)=2x+\ln(1+e^{-3x})$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-3x})=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-3x}=0$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^{3x})=0$

المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

3) الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$f(x)-y=\ln(1+e^{-3x})>0$

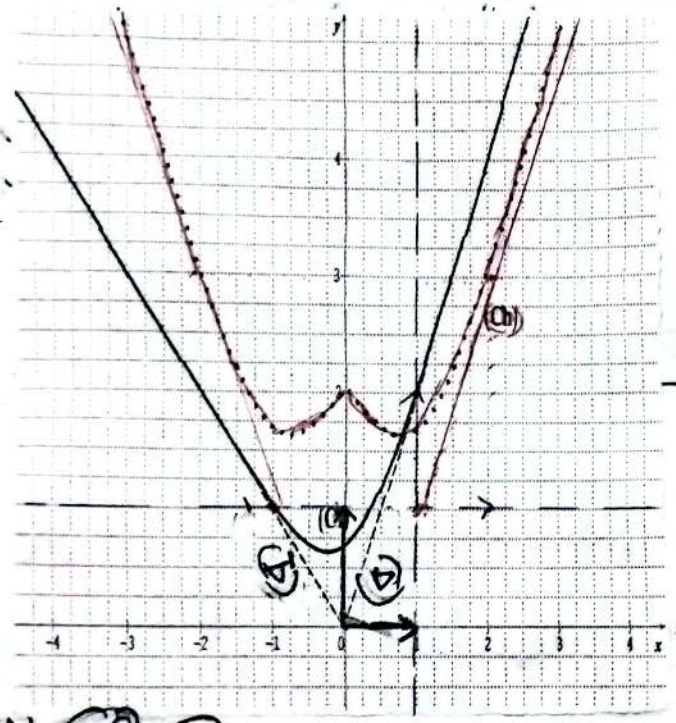
(C_f) يقع فوق (Δ)

الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ')

$f(x)-y=\ln(1+e^{3x})>0$

(C_f) يقع فوق (Δ')

4) رسم (Δ) و (Δ') و (C_f)



(C_f) ←
(Γ) ←

ج) $x \in [0, +\infty[$ لأن

0,25 $h(x) = f(x-1) + 1$

0,25 (Ch) هو صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ثم نكمل رسم (Ch) على المجال $]-\infty, 0]$ بالتناظر محور التراتيب لأن h زوجية

0,25 رسم (Ch) موجود في نفس المعلم السابق

0,25 ⑥ $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x) dx$

0,25 $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} \ln(1+e^{-3x}) dx$

0,25 $x > 0$ لأن $\ln(1+x) < x$ ④

0,25 $\ln(1+e^{-3x}) < e^{-3x}$ أي

0,25 $\int_0^{\lambda} \ln(1+e^{-3x}) dx < \int_0^{\lambda} e^{-3x} dx$

0,25 $A(\lambda) < -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\right]_0^{\lambda}$

$A(\lambda) < -\frac{1}{3}\left[e^{-3\lambda} - 1\right]$

0,25 $A(\lambda) < \frac{1}{3}(1 - e^{-3\lambda}) < \frac{1}{3}$

$A(\lambda) < \frac{1}{3}$ أي

$h(x) = f(|x|-1) + 1$ ، $\mathbb{R}$ ⑦

⑧ $x \in \mathbb{R}$ لكل $-x \in \mathbb{R}$ (متناظرة)

0,25 $h(-x) = f(|-x|-1) + 1$

$h(-x) = f(|x|-1) + 1 = h(x)$

أي h زوجية

0,5