الولاية : بجاية المؤسسة : ثانوية بن حداد محند أويذير تيمزريت السنة الدراسية : 2025/2024	فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات	القسم : 3 تقني رياضي تاريخ الإجراء : الثلاثاء 28 جانفي 2025 المدّة : 2 سا

التمرين الأول : (9 نقاط)

الدالة f معرّفة على المجال $]4;+\infty[$ بـ : $f(x)=10-\frac{5}{x-4}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(D) هو المستقيم الذي $y=x$ معادلة له (انظر الشكل في الوثيقة المرفقة)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=10-\frac{5}{u_n-4}$.

1) أ) مثّل الحدود الأربعة الأولى على حامل محور الفواصل (التمثيل يكون في الوثيقة المرفقة).

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها .

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $5<u_n<9$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم برّر أنها متقاربة .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{u_n-9}{u_n-5}$.

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ يطلب حساب حدها الأول .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

4) تحقّق أنّه : من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{4}{u_n-5}=1-v_n$.

5) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\frac{4}{u_0-5}+\frac{4}{u_1-5}+....+\frac{4}{u_n-5}$

التمرين الثاني : (8 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ : $u_0=e$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=e^9\times u_n^4$.

1) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=2\ln u_n+6$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 4 ، ثم احسب حدّها الأول .

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=e^{\left(4^{n+1}-3\right)}$

2) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=u_0\times u_1\times u_2\times....\times u_n$.

3) المتتالية العددية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \ln(v_n)$.
بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

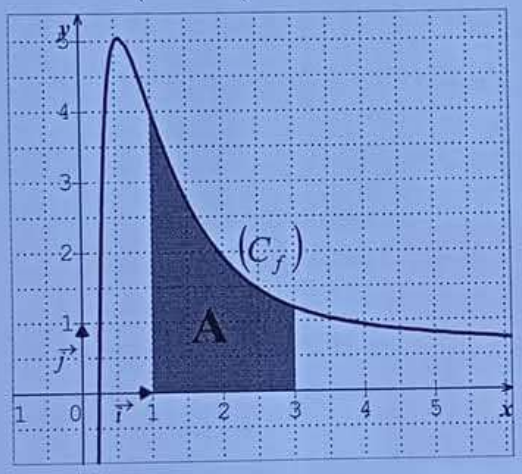
4) نضع : من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n = \ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n)$.

- بيّن أنّه : من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n = (n^2 + 4n + 3)\ln 2$

التمرين الثالث : (3 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ : $f(x) = (-x+4)e^{-x+1} + \dfrac{1+2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
كما هو موضح في الشكل المقابل .



(وحدة الطول هي: 1 سم)

1) باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أن : $\int_1^3 (-x+4)e^{-x+1}\,dx = 2$

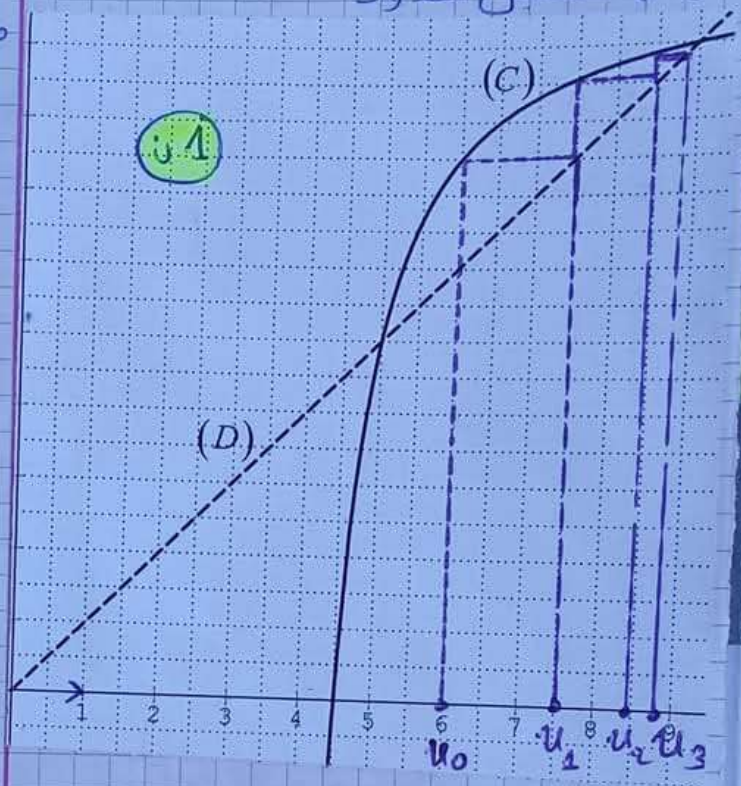
2) احسب A مساحة الجزء الملون في الشكل .

بالتوفيق

الحل النموذجي لفرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات
3 ت: 2024 - 2025

الإجابة عن التمرين الأول:

1) P(1) تمثيل الحدود



ب) يبدو من البيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 9.

ج) P(n) برهان بالتراجع أن: $5 < u_n < 9$

لدينا: $5 < 6 < 9$ أي $5 < u_0 < 9$

ليكن $n \in \mathbb{N}$

نفرض أن: $5 < u_n < 9$

نبرهن أن: $5 < u_{n+1} < 9$

لدينا: $5 < u_n < 9$

منه نجد: $1 < u_n - 4 < 5$

منه نجد: $\frac{1}{5} < \frac{1}{u_n - 4} < \frac{1}{1}$

منه نجد: $-5 < \frac{-5}{u_n - 4} < \frac{-5}{5}$

منه نجد: $5 < 10 - \frac{5}{u_n - 4} < 9$

أي: $5 < u_{n+1} < 9$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $5 < u_n < 9$

ب) دراسة اتجاه تغير (u_n):

$$u_{n+1} - u_n = 10 - \frac{5}{u_n - 4} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{10(u_n - 4) - 5 - u_n(u_n - 4)}{u_n - 4}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{10u_n - 40 - 5 - u_n^2 + 4u_n}{u_n - 4}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 14u_n - 45}{u_n - 4}$$

لدينا: $5 < u_n < 9$

منه نجد: $1 < u_n - 4 < 5$ أي $u_n - 4 > 0$

إذن إشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $-u_n^2 + 14u_n - 45$

لندرس إشارة $-x^2 + 14x - 45$

x	$-\infty$		5		9		$+\infty$
$-x^2+14x-45$		$-$	0	$+$	0	$-$	

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

* المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى بالعدد 9 (0,5)

3) $v_n = \frac{u_n - 9}{u_n - 5}$

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 9}{u_{n+1} - 5}$

$v_{n+1} = \frac{10 - \frac{5}{u_n - 4} - 9}{10 - \frac{5}{u_n - 4} - 5}$

$= \frac{1 - \frac{5}{u_n - 4}}{5 - \frac{5}{u_n - 4}}$

$= \frac{\frac{u_n - 4 - 5}{u_n - 4}}{\frac{5u_n - 20 - 5}{u_n - 4}}$

$= \frac{u_n - 9}{u_n - 4} \times \frac{u_n - 4}{5u_n - 25}$

$= \frac{u_n - 9}{5u_n - 25}$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{u_n - 9}{u_n - 5}\right)$ (1)

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الأول:

$v_0 = \frac{u_0 - 9}{u_0 - 5} = \frac{6 - 9}{6 - 5}$

$v_0 = -3$ (0,5)

(3)

ب) لدينا: $v_n = v_0 \cdot q^{n-0}$

منه: $v_n = -3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$ (0,75)

باستنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = \frac{u_n - 9}{u_n - 5}$

منه: $v_n(u_n - 5) = u_n - 9$

منه: $v_n u_n - 5v_n = u_n - 9$

منه: $v_n u_n - u_n = 5v_n - 9$

$u_n(v_n - 1) = 5v_n - 9$

$u_n = \frac{5v_n - 9}{v_n - 1}$ (0,75)

إذن: $u_n = \frac{-15 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n - 9}{-3\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}$

$\Leftarrow$ لدينا: $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ فإن:

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{-9}{-1} = 9$ (0,5)

4) $1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 9}{u_n - 5}$

$1 - v_n = \frac{u_n - 5 - u_n + 9}{u_n - 5}$

$1 - v_n = \frac{4}{u_n - 5}$ (0,5)

(4)

$v_{n+1} = 4[2\ln u_n + 6]$

$v_{n+1} = 4v_n$ (1,5)

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول

$v_0 = 2\ln u_0 + 6$

$v_0 = 2\ln e + 6$

$v_0 = 8$ (0,5)

ب) $v_n = v_0 \cdot q^n$

$v_n = 8 \times 4^n$ (0,75)

لدينا: $v_n = 2\ln u_n + 6$

منه: $v_n - 6 = 2\ln u_n$

$\frac{v_n - 6}{2} = \ln u_n$

$u_n = e^{\frac{v_n - 6}{2}}$

$u_n = e^{\frac{8\times 4^n - 6}{2}}$

$u_n = e^{\frac{2(4\times 4^n - 3)}{2}}$ (0,75)

$u_n = e^{(4^{n+1} - 3)}$

ج) $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

لدينا: $u_n = e^{\frac{v_n - 6}{2}}$

منه: $P_n = e^{\frac{v_0-6}{2}} \times e^{\frac{v_1-6}{2}} \times \dots \times e^{\frac{v_n-6}{2}}$

$P_n = e^{\left(\frac{v_0-6}{2} + \frac{v_1-6}{2} + \dots + \frac{v_n-6}{2}\right)}$

د) $S_n = \frac{4}{u_0-5} + \frac{4}{u_1-5} + \dots + \frac{4}{u_n-5}$

لدينا: $\frac{4}{u_n-5} = 1 - v_n$ منه:

$S_n = 1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_n$

منه:

$S_n = 1 + 1 + \dots + 1 - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$

$S_n = (n+1)\times 1 - v_0\left[\frac{1 - q^{n-0+1}}{1-q}\right]$

$S_n = n+1+3\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}\right]$

$S_n = n+1+3\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}\right]$ (0,5)

$S_n = n+1+3\times\frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]$

$S_n = n+1+\frac{15}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]$

الإجابة عن التمرين 4:

$v_{n+1} = 2\ln u_{n+1} + 6$ (P(1

$v_{n+1} = 2\ln(e^9 \times u_n^4) + 6$

$v_{n+1} = 2(\ln e^9 + \ln u_n^4) + 6$

$v_{n+1} = 2(9 + 4\ln u_n) + 6$

$v_{n+1} = 18 + 8\ln u_n + 6$

$v_{n+1} = 8\ln u_n + 24$

$$T_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln 8 + \ln 8 + n \ln 4)$$

$$T_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(2\ln 8 + n \ln 4)$$

$$T_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(2\ln 2^3 + n \ln 2^2)$$

$$T_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(2\times 3\ln 2 + n \times 2\ln 2)$$

$$T_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(6\ln 2 + 2n \ln 2)$$

$$T_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(6+2n)\ln 2$$

$$T_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)\times 2(3+n)\ln 2$$

$$T_n = (n+1)(3+n)\ln 2$$

$$T_n = (n^2+4n+3)\ln 2$$

1 ن

(8)

$$P_n = e^{\frac{1}{2}(v_0 - 6 + v_1 - 6 + \dots + v_n - 6)}$$

$$P_n = e^{\frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \dots + v_n - 6 - 6 - \dots - 6)}$$

$$P_n = e^{\frac{1}{2}\left[v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right) + (n+1)(-6)\right]}$$

$$P_n = e^{\frac{1}{2}\left[8\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right) - 6n - 6\right]}$$

$$P_n = e^{\frac{1}{2}\left[8\times(-3)\left(1-4^{n+1}\right) - 6n - 6\right]}$$

$$P_n = e^{\frac{1}{2}\left[-24\times\left(1-4^{n+1}\right) - 6n - 6\right]}$$

$$P_n = e^{-12\left(1-4^{n+1}\right) - 3n - 3}$$

1 ن

(3

$$w_n = \ln v_n$$

$$w_n = \ln(8\times 4^n)$$

$$w_n = \ln 8 + \ln 4^n$$

$$w_n = \ln 8 + n \ln 4$$ 0.5 ن

$$w_n = w_0 + n r$$

إذن (w_n) متتالية حسابية

أساسها $r = \ln 4$ 0.5 ن وحدها الأول $w_0 = \ln 8$ 0.5 ن

(5

$$T_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n)$$

$$T_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n$$

$$T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$$

$$T_n = \frac{n-0+1}{2}(w_0 + w_n)$$

(7)

$$A = 2 + \left[\ln x + 2 \cdot \frac{1}{2} \ln^2 x\right]_1^3$$

$$A = 2 + \left[\ln 3 + \ln^2 3\right] - \left[\ln 1 + \ln^2 1\right]$$

$$A = \left(2 + \ln 3 + \ln^2 3\right) cm^2$$

1,5

الإجابة عن التمرين الثالث:

$u(x) = -x+4 \longrightarrow u'(x) = 1$ (1

$v'(x) = e^{-x+1} \longrightarrow v(x) = -e^{-x+1}$

$$\int_1^3 (-x+4) e^{-x+1} dx = \left[-(-x+4) e^{-x+1}\right]_1^3 - \int_1^3 e^{-x+1} dx$$

$$= \left[(x-4) e^{-x+1}\right]_1^3 - \left[-e^{-x+1}\right]_1^3$$

1,5

$$= \left[(x-4) e^{-x+1}\right]_1^3 + \left[e^{-x+1}\right]_1^3$$

$$= -e^{-2} - (-3) e^{0} + e^{-2} - e^{0}$$

$$= 2$$

$$A = \int_1^3 f(x) dx \cdot \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \quad (e$$

$$A = \int_1^3 (-x+4) e^{-x+1} dx + \frac{1+2\ln x}{x} dx$$

$$A = \int_1^3 (-x+4) e^{-x+1} dx + \int_1^3 \frac{1+2\ln x}{x} dx$$

$$A = 2 + \int_1^3 \frac{1}{x} + 2\,\frac{\ln x}{x} dx$$