ثانوية صديقي النوري – الجلفة | الموسم الدراسي: 2024 – 2025

الفرض الثاني للفصل الأول

قسم: ثالثة علوم تجريبية | الأستاذ: قويسم الخليل

يوم: 20 نوفمبر 2024 | المدة: 01 ساعة

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x - e^{-x}$

[01.00] ❶ ادرس تغيرات الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

[00.75] ❷ أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقق أنّ $0.56 < \alpha < 0.57$

[00.50] ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{x+1}{e^x+1}$ حيث (C_f) تمثيلها البياني في المستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$

[00.75] ❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

[01.00] ❷ أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسيا

[00.50] ب- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و $(\Delta): y = x + 2$

[00.50] ❸ أ- بيّن أنه من أجل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \frac{-e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$

[00.75] ب- استنتج تغيرات الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها

[00.50] ❹ عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسيا

[01.00] ❺ بين أنّ $f(x) = x + 1$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$

[01.00] ❻ ارسم (Δ) و (C_f)

[01.00] ❼ ناقش بيانيا حسم قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

[00.75] III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $h(x) + |f(x)| = 0$ ونسمي (C_h) تمثيلها البياني

– اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)

–يقال إن الإنسان لا يكون فيلسوفا إلا بدراسة فروع الرياضيات ، كالحساب والهندسة والفلك–

تصحيح مقترح للفرض الثاني للفصل الأول

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g :

• **حساب النهايات:**

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x - e^{-x}) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - e^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

• **حساب $g'(x)$:**

لدينا: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $g'(x) = 1 + e^{-x}$

لدينا: $e^{-x} > 0$ ومنه: $1 + e^{-x} > 0$ ومنه $g'(x) > 0$

إذن: الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

• **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

❷ أ/ تبيين أن $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا $\begin{cases} g(0.56) = 0.01 \\ g(0.57) = -0.01 \end{cases}$ ومنه: $g(0.57) \times g(0.56) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث $0.56 < \alpha < 0.57$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$

وعليه:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶ حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x+1}{e^x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 + \frac{e^x}{e^x}\left(\frac{\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 + \frac{\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}\right] = 0$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \left({}^{x^n}/_{e^x}\right) = 0$

• التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته $y = 0$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{x+1}{e^x+1}\right) = -\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

❷ أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\left[1+\frac{x+1}{e^x+1}-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[1+\frac{x+1-xe^x-x}{e^x+1}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[1+\frac{1-xe^x}{e^x+1}\right] = 1+1 = 2$$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

• التفسير الهندسي:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 2$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x-2] = 0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] = 0$

◄ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x+2$ مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $-\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

من أجل كل x حقيقي لدينا:

$$f(x)-(x+2) = 1+\frac{x+1}{e^x+1}-x-2 = \frac{x+1}{e^x+1}-x-1 = \frac{-xe^x-e^x}{e^x+1} = \frac{-e^x(x+1)}{e^x+1}$$

لدينا: $e^x > 0$

ولدينا: $-(x+1) = 0$ معناه $x = -1$ إذن:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-(x+2)$	$+$	0	$-$
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-1;1)$	(C_f) تحت (Δ)

❸ أ/ حساب $f'(x)$:

لدينا: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x) = \frac{e^x+1-e^x(x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x+1-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1-xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-e^x(x-e^{-x})}{(e^x+1)^2} = \frac{-e^x\,g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

لدينا $(e^x+1)^2 > 0$ و $e^x > 0$

ومنه الإشارة من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

❹ تعيين دون حساب قيمة $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$:

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]=f'(\alpha)=\frac{-e^{\alpha}\overbrace{g(\alpha)}^{=0}}{(e^{\alpha}+1)^2}=0$$

- **التفسير الهندسي:**

(C_f) يقبل مماس مواز لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α معادلته: $y=f(\alpha)$

❺ تبيين أن المعادلة $f(x)=x+1$ إذا وفقط اذا كان $g(x)=0$

- **اثبات أنّ $f(x)=x+1$ إذا كان $g(x)=0$:**

لدينا: $g(x)=0$

تكافئ: $x-e^{-x}=0$

ومنه: $e^{-x}=x$

ومنه : $e^{x}=\frac{1}{x}$

ولدينا:

$$f(x)=1+\frac{x+1}{e^x+1}=1+\frac{x+1}{\frac{1}{x}+1}=1+\frac{x+1}{\frac{1+x}{x}}=1+x$$

ومنه: $f(x)=x+1$

- **اثبات أنّ $g(x)=0$ إذا كان $f(x)=x+1$:**

لدينا: $f(x)=x+1$

تكافئ: $f(x)-(x+1)=0$

ومنه: $1+\frac{x+1}{e^x+1}-x-1=0$

ومنه : $\frac{x+1-x(e^x+1)}{e^x+1}=0$

ومنه : $\frac{x+1-x(e^x+1)}{e^x+1}=0$

ومنه : $\frac{1-xe^x}{e^x+1}=0$

ومنه : $\frac{-e^x(x-e^{-x})}{e^x+1}=0$

ومنه: $x-e^{-x}=0$

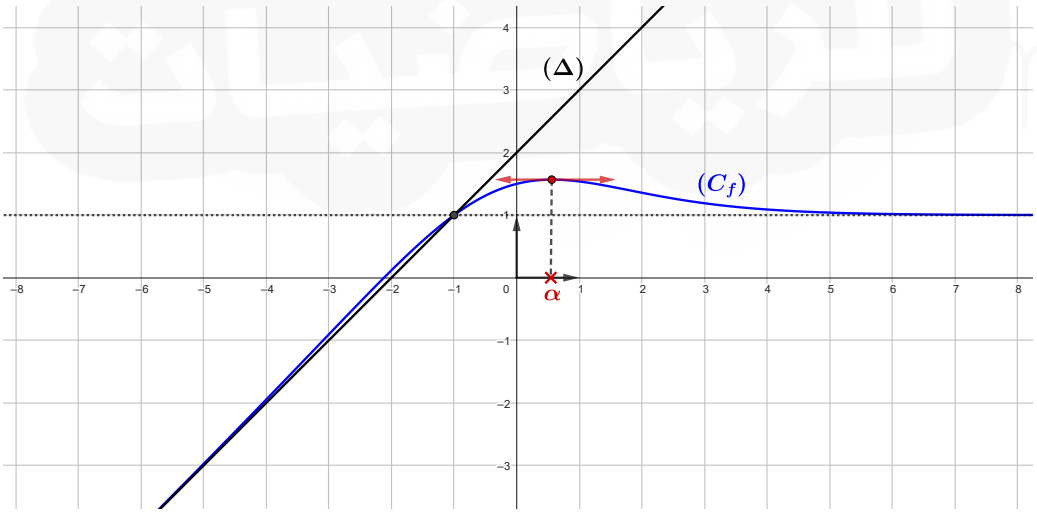
ومنه: $g(x)=0$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $f(x)=x+1$ ومنه : $f(\alpha)=\alpha+1$

لدينا: $0.56<\alpha<0.57$ ومنه: $1.56<\alpha+1<1.57$ ومنه: $1.56<f(\alpha)<1.57$

❻ التمثيل البياني:



❼ المناقشة البيانية لعدد واشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$:

حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y=f(m)$

قيم $f(m)$	قيم m	عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$
$f(m)\leq 1$	$m\leq -1$	حل وحيد
$1<f(m)<f(\alpha)$	$m\in\ ]-1;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$	حلان
$f(m)=f(\alpha)$	$m=\alpha$	حل وحيد

III) شرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f):

لدينا: $h(x)+|f(x)|=0$

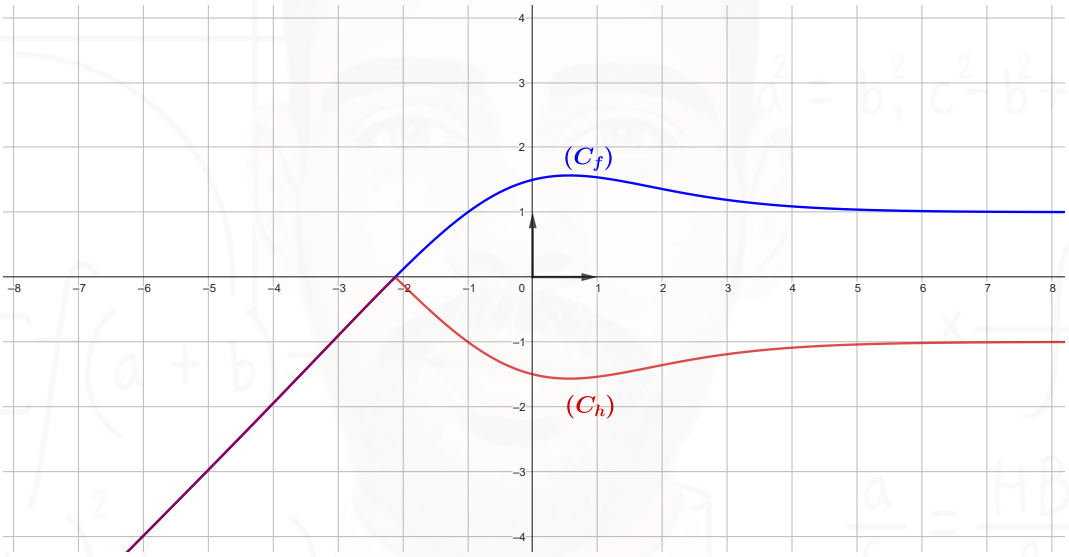
تكافئ: $h(x)=-|f(x)|$

ومنه:

$$h(x)=-|f(x)|=\begin{cases}-f(x) & ;\ f(x)\geq 0\\ f(x) & ;\ f(x)\leq 0\end{cases}$$

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x)\leq 0$

ويناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل إذا كان $f(x)\geq 0$



(الإنسان الذي لم يخطئ لم يجرب شيئا جديدا)