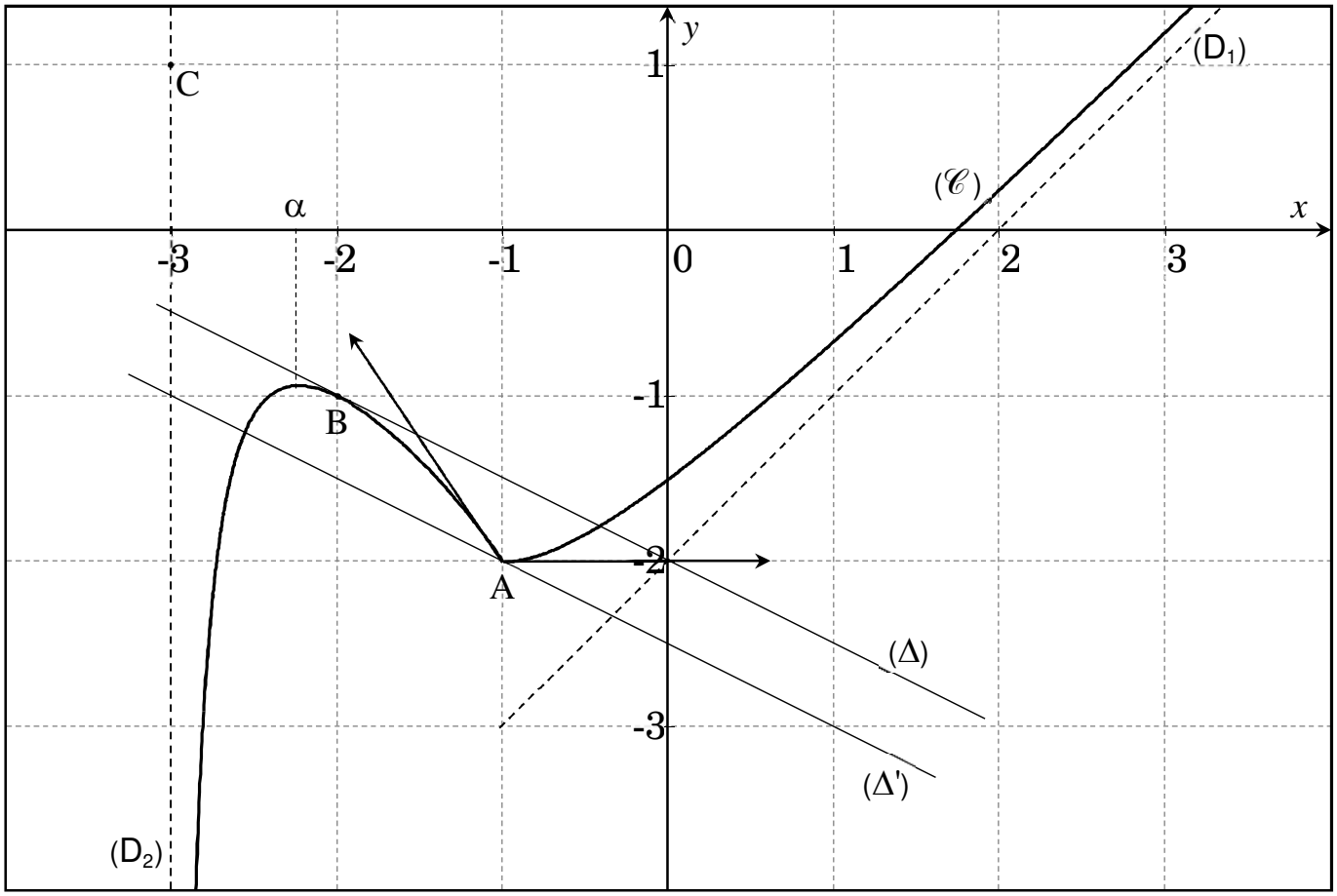
| | | |
|---|---|---|
| الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)<br>المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"<br>المادة: رياضيات | **فرض**<br>**الفصل الأول** | الموسم الدراسي: 2023/2024م<br>المدة: ساعتان (2سا)<br>إعداد: عبد المطلب |

مدرسة "الرجاء والتفوق" الخاصة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

## تمرين 1 (09نقاط)

في الشّكل المرفق: التمثيل البياني $(\mathscr{C})$ للدالة $f$ المعرّفة على المجال $]-3\,;+\infty[$. $(D_1)$ المستقيم المقارب المائل لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$، $(D_2)$ المستقيم المقارب لـ $(\mathscr{C})$ يوازي حامل محور التراتيب، $(\Delta)$ المماس لـ $(\mathscr{C})$ عند النقطة $B(-2\,;-1)$، $(\Delta')$ المستقيم الذي يوازي $(\Delta)$ ويشمل النقطة $A(-1\,;-2)$، كما يوجد نصفي مماسين عند النقطة A أحدهما يوازي حامل محور الفواصل والآخر يشمل النقطة $C(-3\,;1)$، $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند نقطة فاصلتها $\alpha$.




**1)** اكتب معادلة لكل من المستقيمين المقاربين $(D_1)$ و $(D_2)$، ثم عيّن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

**2)** احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x)+2}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x)+2}{x+1}$. ماذا تستنتج؟ وماذا نسمي النقطة A ؟

**3)** ادرس إشارة $f'(x)$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ مبرزا القيم الحدية والنهايات على المجال $]-3\,;+\infty[$.

**4)** اكتب معادلة للمماس $(\Delta)$، ثم عيّن القيمة المقرّبة للعدد $f(-1{,}99)$، باستعمال التقريب التآلفي للدالة $f$.

**5)** اكتب معادلة لـ $(\Delta')$، ثم عيّن قيم الوسيط الحقيقي $m$ حتى تقبل المعادلة: $f(x)=m-\dfrac{x}{2}$ ثلاثة حلول متمايزة.

**6)** ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم $(AB)$. استنتج حلول المتراجحة $(f(x)<-x-3)$ على المجال $]-3\,;+\infty[$.

**7)** $g$ و $h$ الدالتان المعرّفتان على $[-1\,;-3]$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ و $h'(x)=f(x)$. عيّن اتجاه تغير كل من $g$ و $h$.

**8)** إذا علمت أنّ: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$ على المجال $]-1\,;+\infty[$، عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$.

اقلب الورقة

**تمرين2 (11 نقطة)**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-2-\dfrac{9x}{x^2+2}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 1cm)

**1)** احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x+2)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+2)$.

**2)** بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$. ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

**3)** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2+14)}{(x^2+2)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

**4)** اكتب معادلة للمماس (T) للمنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة $A(0\,;-2)$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ (T)، ماذا تمثل A ؟

**5)** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f(-x)+f(x)=-4$ ، استنتج أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل كمركز تناظر نقطة يطلب تعيينها.

**6)** اكتب معادلة للمماس (D) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند الفاصلة 2. استنتج معادلة لمماس المنحني $(\mathscr{C})$ نظير (D) بالنسبة لـ A.

**7)** حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم ارسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$، المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$.

**8)** عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، حتى تقبل المعادلة: $\dfrac{9}{x^2+2}=1+\dfrac{m}{x}$ ثلاثة حلول متمايزة.

**9)** $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(|x|)+2$.

ليكن $(\mathscr{C}')$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]1\,;+\infty[$. أعط حصرا للعدد $\alpha$ سعته 1.

ب) احسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{g(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{g(x)}{x}$. ماذا تستنتج؟ فسّر ذلك هندسيا.

ج) بيّن أنّ الدالة $g$ زوجية، ثم اشرح كيفية رسم $(\mathscr{C}')$ انطلاقا من $(\mathscr{C})$ وارسم $(\mathscr{C}')$ في المعلم السابق.

**سؤال اضافي:** 01 نقطة

$f_k$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=x-2-\dfrac{9kx}{x^2+2k}$ ، حيث $k$ وسيط حقيقي موجب تماما.

بيّن أنّ الدالة $f_k$ تقبل قيمتين حديتين يطلب تعيينهما.

بالتّوفيق

# تصحيح فرض الفصل الأول 2023م

## تمرين 1: "عبد المطلب"

1) $(D_1): y = x - 2$ ؛ $(D_2): x = -3$

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x + 2) = 0$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -2$

2) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)+2}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$

$= \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-3}{2} = f'_g(-1)$

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)+2}{x+1} = f'_d(-1) = 0$

$f$ غير قابلة للاشتقاق عند $-1$

لأن: $f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$

النقطة A تسمى نقطة زاوية.

3)

| $x$ | $-3$ | | $\alpha$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\frac{3}{2}$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

4) $(\Delta)$ يشمل $B(-2;-1)$ و $D(0;-2)$

$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

$f'(-2) = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{-1}{2}$

$(\Delta): y = \frac{-1}{2}x - 2$

$x$ قريب من $-2$: معناه $f(x) \simeq \frac{-x}{2} - 2$

$f(-1,99) \simeq -\left(\frac{-1,99}{2}\right) - 2 \simeq -1,005$

5) $(\Delta')$ يوازي $(\Delta)$ يعني: $y = \frac{-1}{2}x + b$

$(\Delta')$ يشمل $A$: $-2 = \frac{-1}{2}(-1) + b$

أي $b = \frac{-5}{2}$ ومنه: $(\Delta'): y = \frac{-x}{2} - \frac{5}{2}$

$f(x) = \frac{-x}{2} + m$

$(\Delta)$ تقاطع مع $(C)$ لاستقيمات أطوازية لـ $(\Delta)$

3 حلول متمايزة: $\frac{-5}{2} < m < -2$

6) وضعية $(C)$ بالنسبة لـ $(AB)$:

$(AB)$ أعلى $f(C)$: $x \in ]-2;-1[ \cup ]-1;+\infty[$

$(AB)$ أسفل $f(C)$: $x \in ]-3;-2[$

$(C)$ يقطع $(AB)$ عند $A$ و $B$.

معادلة $(AB)$ هي: $y = -x - 3$

ومنه الحلول في $\mathbb{R}$: $x \in ]-3;-2[$

7) $g'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$ ومنه:

$g$ متناقصة تماما على $]-3;\alpha]$

ومتزايدة تماما على $[\alpha;-1]$.

$h'(x) = f(x)$ و $f(x) < 0$ لما $-3 < x \leq -1$

ومنه: $h$ متناقصة تماما على $]-3;-1]$.

8) $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

ومنه: $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا $(D_1)$.

لما $a = 1$ و $b = -2$

لدينا: $f(-1) = -2$ و $f'(-1) = 0$

$$d \neq 1 \begin{cases} c = d - 1 \\ c = (d-1)^2 \end{cases} \begin{cases} -3 + \frac{c}{d-1} = -2 \\ 1 - \frac{c}{(d-1)^2} = 0 \end{cases}$$

بما أن $d \neq 1$ فإن $(d-1)^2 = d - 1$

ومنه $d - 1 = 1$ $d = 2$

ومنه: $c = d - 1$ $c = 1$

## تمرين 2:

1) بما أن: $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{9x}{x^2+2} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{9}{x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x+2)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+2)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-y)=0$ لأن $(\Delta): y = x-2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$f(x)-y = \frac{-9x}{x^2+2}$

$x>0$ : $(\mathcal{C})$ أسفل $(\Delta)$

$x<0$ : $(\mathcal{C})$ أعلى $(\Delta)$

$(\mathcal{C})$ يقطع $(\Delta)$ عند النقطة $A(0;-2)$

3) $f'(x) = 1 - \frac{9(x^2+2)-18x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+13x^2-14}{(x^2+2)^2}$

$f'(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+14)}{(x^2+2)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $+\infty$ |

4) $y = f'(0)(x-0)+f(0) = \frac{-7}{2}x - 2$

الوضعية: $f(x)-y = \frac{9x^3}{2(x^2+2)}$

$x>0$ : $(\mathcal{C})$ أعلى $(T)$.

$x<0$ : $(\mathcal{C})$ أسفل $(T)$.

$(\mathcal{C})$ يخترق $(T)$ في النقطة $A$.

$A$ تمثل نقطة انعطاف.

5) $f(-x)+f(x) = -x-2+\frac{9x}{x^2+2}+x-2-\frac{9x}{x^2+2}$

$f(-x)+f(x) = -4$

ومنه $A$ مركز تناظر $f(2(0)-x)+f(x) = 2(-2)$

6) $y = f'(2)(x-2)+f(2) = \frac{3}{2}x - 6$ : $(D)$

بما أن $f(-x) = -4 - f(x)$ :

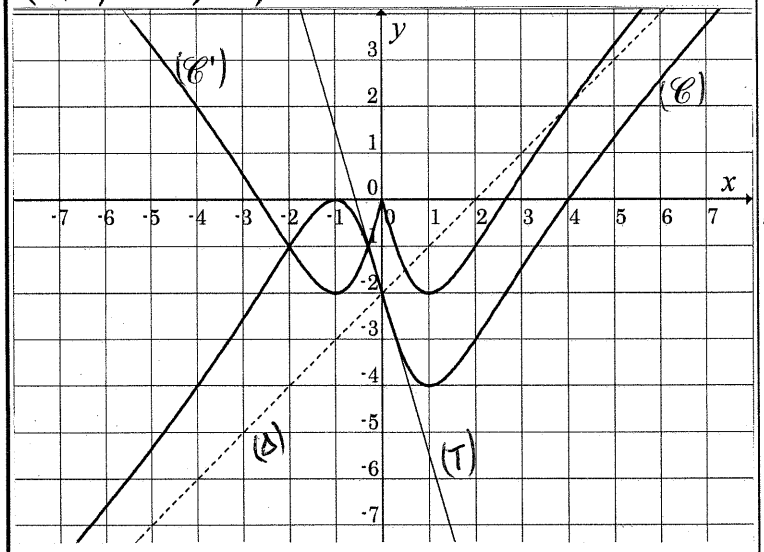
$-y-4 = \frac{3}{2}(-x)-6$

نظير $(D)$ بالنسبة لـ $A$: $y = \frac{3}{2}x + 2$

7) $f(x)=0$ و منه $f(-1)=0$ يعني:

$x^3-2x^2-7x-4 = (x+1)(x^2-3x-4)=0$

$(x+1)^2(x-4)=0$ و منه $x_1=-1$ ، $x_2=4$




8) $-m = x - \frac{9x}{x^2+2}$

نضيف 2- لطرفي المعادلة:

$f(x) = -m-2$

فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المستقيمات الأفقية $y=-m-2$. 3 حلول متمايزة:

$-m-2 \in ]-4;-2[\cup]-2;0[$

$-m \in ]-2;0[\cup]0;2[$

ومنه: $m \in ]-2;0[\cup]0;2[$

9) أ) $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$. $(g(1)=-2)$ و $(\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty)$

$g(1)<1$ و $(\lim_{x\to+\infty} g(x)>1)$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\in[1;+\infty[$

لأن: $g(3)<1$ ، $g(4)>1$ : $3<\alpha<4$

ب) $\lim_{x\to0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{-x+\frac{9x}{x^2+2}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{x(-x^2+7)}{x(x^2+2)} = \frac{7}{2}$

$\lim_{x\to0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{x-\frac{9x}{x^2+2}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{x(x^2-7)}{x(x^2+2)} = \frac{-7}{2}$

$g'_g(0) \neq g'_d(0)$ ، $g$ غير قابلة للاشتقاق عند 0.

$O(0;0)$ نقطة زاوية عندها يوجد نصفي مماسين

ج) $g$ زوجية: $g(-x) = f(|1-x|)+2 = f(|x|)+2 = g(x)$ (صورة $x$ و $-x$ بالتناظر)

$x>0$ : $g = f+2$. $(\mathcal{C}')$ يطابق $(\mathcal{C})$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0;2)$

$x<0$ : تناظر بالنسبة لـ $(Oy)$.

"عبد المطلب"