الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية: راشدي محمد " سيدي معروف" **التاريخ: 2023/11/07.**

المستوى: الثالـثة ـريـاضـيات ـ **المدة: ساعة ونصف.**

الفرض الأول للثلاثي الأول.

التمرين الأول:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ ،

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3- بين أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \dfrac{f(x)+1}{x}=-\infty$ ، ماذا تستنتج؟

- فسر النتيجة السابقة هندسيا.

4- أثبت أنه من أجل كل $x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$: $f'(x)=1+\dfrac{1}{2(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}$.

- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5- أحسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-2$.

6- أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha\in\left]2,\dfrac{5}{2}\right[$.

- بين أن $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}=\alpha-1$.

7- بين أن معادلة (T_α) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=\alpha$ تكتب على الشكل

$$y=\left[1+\frac{1}{2(\alpha-1)^3}\right](x-\alpha)$$

8- أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيمين (Δ) و (D).

التمرين الثاني:

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث المستقيم $(D): y=2$ مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$، (Δ) و (T) مماسين لـ (C_f) عند النقطتين $A\left(3,\dfrac{11}{2}\right)$ و $B(0,-2)$ و $f(a)=-\dfrac{5}{2}$.

❖ **بقراءة بيانية أجب عن ما يلي:**

1- هل الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty,1[$؟ برر إجابتك.

2- أ- أكتب معادلة كل من (Δ) و (T).

ب- عين الوضعية النسبية لـ (C_f) و (T). ماذا تستنتج؟

3- أ- عين النهايات التالية: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2-f(x)}$ ؛ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

ب- عين النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+2}{x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)+2}{x}$ ؛ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)+2.5}{h}$ ؛

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(-x+6)+5.5}{x-3}$.

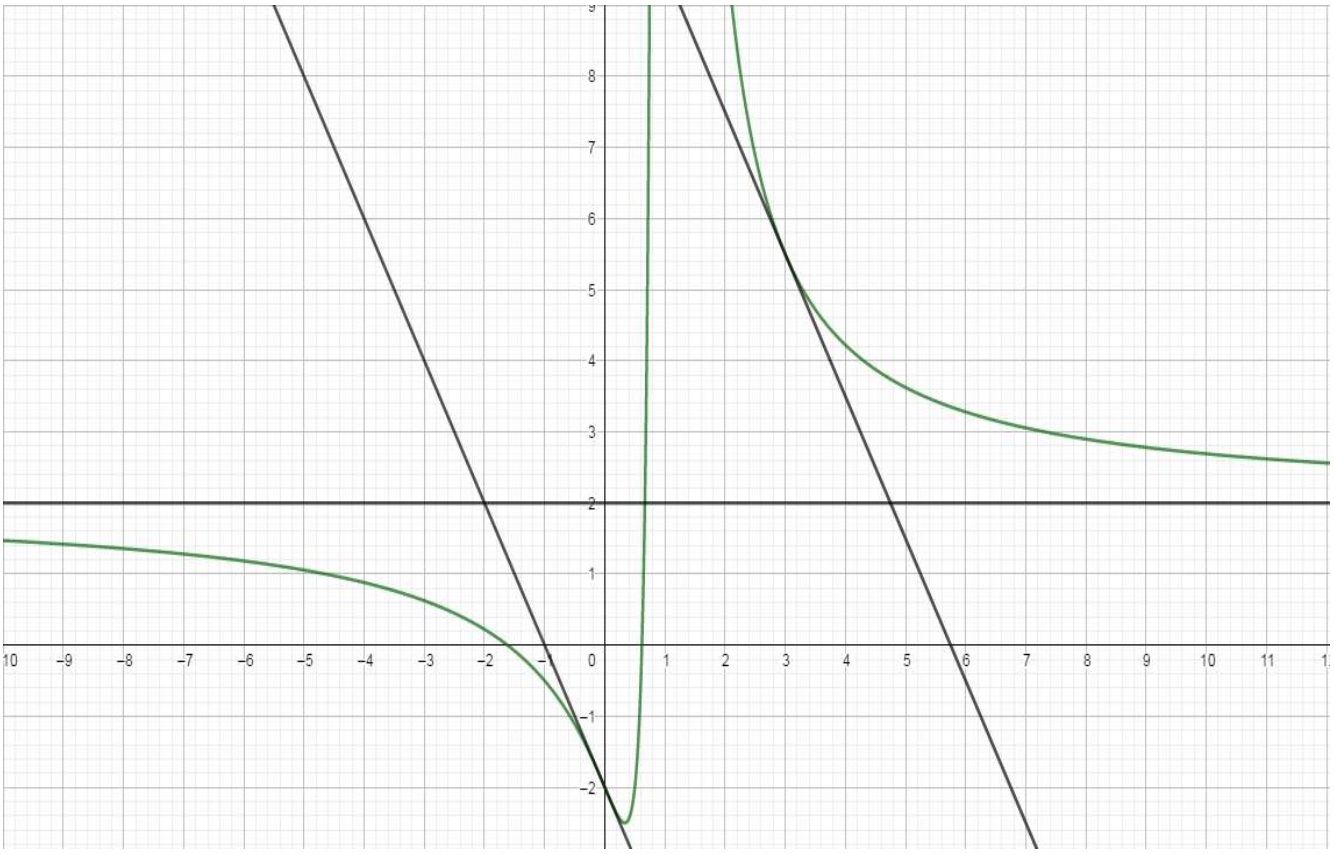
ج- جد قيمة مقربة للعدد $f(2.999)$.

4- أ- أكتب جدول تغيرات الدالة f مبينا إشارة مشتقتها.

ب- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $0.5 \prec \alpha \prec 1$ و $-2 \prec \beta \prec -1.5$.

5- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=-2x+m$.

6- أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{0,1\}$ بـ: $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ دون حساب عبارتها.



بالتوفيق

2023/2024 — اعدادي 3 رياضي

التصحيح النموذجي للفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات.

التمرين الأول: (9 نقط)

$f(x) = x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

$D_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

(1) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left[x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right] = -\infty$ (0,5)

($x \to 1$: $x-1 \to 0$, $\frac{x}{x-1} \to +\infty$, $\sqrt{\frac{x}{x-1}} \to +\infty$)

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور التراتيب معادلته $x = 1$ (0,5)

(2) حساب النهايات:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right] = +\infty$ (0,5)
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right] = -\infty$ (0,5)

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \left[1 - \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x} \right]$

$= \lim_{x \to 0} \left[1 + \sqrt{\frac{x}{x^2(x-1)}} \right]$

$= \lim_{x \to 0} \left[1 + \sqrt{\frac{x}{x(x-1)}} \right] = +\infty$ (0,5)

(0,5) إذن نستنتج: الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0.

(0,5) التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور التراتيب معادلته $x = 0$.

(4) الدالة f تقبل الاشتقاق على $D_f - \{0\}$ و:

$f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}} = 1 - \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$

أي: $f'(x) = 1 + \frac{1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$ (0,5)

اتجاه التغير: لدينا من أجل كل $x \in D_f - \{0\}$:

$f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين: $]-\infty, 0]$ و $]1, +\infty[$ (0,5)

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	$\|$	↗	$+\infty$

$f(0) = -1$ (0,5)

(5) $\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{|x| \to +\infty} -\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -1$ (0,5)

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $(\Delta): y = x - 1 - 1 = x - 2$ (0,5)

الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ):

لدراسة إشارة الفرق:

$f(x) - y = x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}} - x + 2 = 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

نميز حالتين:

$x - 1 < x \leq 0$ فإن: $x \in]-\infty, 0]$ لما

$\frac{x}{x-1} < 1$ ومنه:

$f(x) - y > 0$ أي $0 < 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ ومنه (0,5)

$x - 1 < x$ فإن: $x \in]1, +\infty[$ لما

$f(x) - y < 0$ أي $1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}} < 0$ ومنه $1 < \frac{x}{x-1}$

وعليه:

(0,5) على المجال $]-\infty, 0[$ يقع (C_f) تحت (Δ)

وعلى المجال $]1, +\infty[$ يقع (C_f) فوق (Δ)

(6) لدينا الدالة f مستمرة وتقابلية على المجال $]1, +\infty[$

$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

وبما أن الدالة f متزايدة تماما على هذا المجال فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على هذا المجال. (0,75)

على المجال $]-\infty, 0]$ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلول لأن $f(x) < 0$.

$f(2) \simeq < 0$ و $f(\frac{5}{2}) \simeq > 0$

فإن $\alpha \in]2; \frac{5}{2}[$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$.

لدينا $f(\alpha) = 0$ ومنه $\alpha - 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = 0$

أي $\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \alpha - 1$ (0,25)

(7) معادلة المماس (T_α) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة α هي:

$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

$\lim_{x\to 3} \frac{f(-x+6)+5,5}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$= g'(3) = -f'(3) = 2$ (0,5)

$g(x) = f(-x+6) \rightsquigarrow g(3) = f(3) = -5,5$ حيث

$g'(x) = -f'(-x+6) \rightsquigarrow g'(3) = -f'(3)$

$f(2,999) = f(3-0,001) = f'(3)\times(-0,001) + f(3)$ (0,5)

$= -2(-0,001) + 5,5$

$= 5,5 + 0,001 = 5,501$

4) أ- جدول التغيرات

x	$-\infty$	a	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	3	$+\infty$	$+\infty$	3
			$-5,5$	

(1)

ب- (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين

لأن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين

حيث $-2 < \beta < -1,5$ و $0,5 < \alpha < 1$ (0,75)

5) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = -2x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذ ذ المعادلة $y=-2x+m$

(1)

قيم m	عدد وإشارة الحلول:
$m < 2$	المعادلة حل سالب.
$m = 2$	المعادلة حل معدوم.
$2 < m < 11,5$	المعادلة حلان موجبان.
$m = 11,5$	حلان هما متباينان
$m > 11,5$	3 حلول موجبة.

$(\Delta): y = ax+b \rightsquigarrow a = \frac{5,5-3,5}{3-4} = -2$

$b = 11,5$ أي $5,5 = -2\times 3 + b$ ومنه

$(\Delta): y = -2x + \frac{23}{2}$ (0,5) ومنه

$B(0,-2)$; $B'(-1,0) \in (T)$ ومنيا:

$a = \frac{0+2}{-1-0} = -2$ | $b = -2$ ومنه

$(T): y = -2x - 2$ (0,5) ومنه

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) و (T):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (T)		(C_f) يقطع (T) في النقطة $B(0,-2)$		(C_f) يقع فوق (T)

(0,5)

الاستنتاج: (C_f) يقبل النقطة $B(0,-2)$ كمركز تناظر. (0,5)

3) أ- تعيين النهايات:

$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = -\infty$ (0,25)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{+\infty}}{-(f(x)-5,5)} = -\infty$ (0,5)

$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ (0,25)

ب- تعيين النهايات:

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+2}{x} = f'(0) = -2$ (0,5)

$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)+2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(2)}{x-0} = f''(0) = 0$ (0,5)

$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+2,5}{h} = f'(a) = 0$ (0,5)

$(T_a): y = \left(1 + \frac{1}{2(a-1)^2(a-1)}\right)(x-a)$ ومنه

أي $(T_a): y = \left(1 + \frac{1}{2(x-1)^3}\right)(x-a)$ (0,5)

2) الإنشاء: (0,5) + (0,75)

التمرين الثاني: (5 نقاط)

1) - المعادلة f مستمرة على المجال $]-\infty;1[$

لأن: (Φ) خطية رسمت دون رفع القلم (0,75)

2) - أ) كتابة معادلة لكل من (Δ) و (T).

- لدينا: $A(3;5,5)$ و $A'(4;3,5)$ من (Δ) ومنه

Scanné avec CamScanner

⑤- دراسة إتجاه تغير الدالة g حيث
$g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\mathbb{R}-\{0;1\}$ على المجال الدالة g قابلة للاشتقاق

$g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$. (0,5)

لدينا :

$x=\frac{1}{a}$ إذن $\frac{1}{x}=a$ لما $f'\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

$\frac{1}{a}>x>1$ إذن $a<\frac{1}{x}<1$ لما $f'\left(\frac{1}{x}\right)\geq 0$.

$x<1$ إذن $\frac{1}{x}>1$ لما $f'\left(\frac{1}{x}\right)<0$
أو
$x>\frac{1}{a}$ أي $\frac{1}{x}<a$.

(0,75)

(تابع)

x	$-\infty$	0	1	$\frac{1}{a}$	$+\infty$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$	$-$	$-$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$+$	$+$	$-$	0	$+$

نستنتج : الدالة g متناقصة تماما على المجال :

$]1;\frac{1}{a}]$ (0,25)

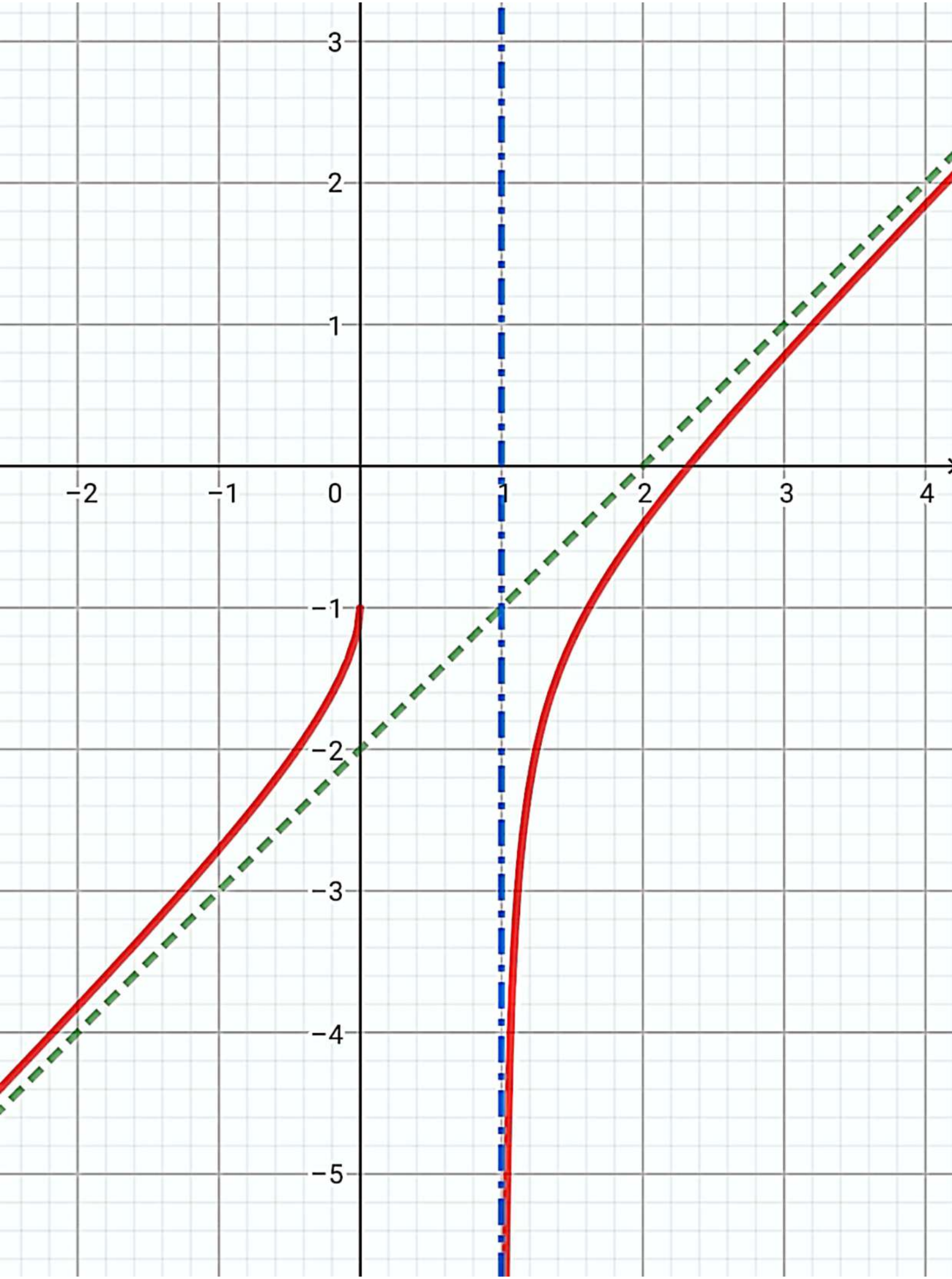
وتزايدية تماما على المجالين :

$]0;1[$ و $]-\infty;0[$

و $]\frac{1}{a};+\infty[$.

انظر الصفحة

Scanné avec CamScanner



Scanné avec CamScanner