I) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3 - i\sqrt{3}$

❶ اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي

❷ نعتبر العدد المركب L الذي يحقق: $z_A - z_B = L(z_A - z_C)$، اكتب L على الشكل الجبري، ثم الأسي

❸ استنتج طبيعة المثلث ABC

III) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

❶ جد الكتابة المركبة للتشابه S

❷ عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S

❸ بين أن النقط A، B و A' في استقامية

يوم: 07 مارس 2023
المدة: 30 دقيقة
فرض الفصل الثالث
الأستاذ: قويسم الخليل
الشعبة: علوم تجريبية

I) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3 - i\sqrt{3}$

❶ اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي

❷ نعتبر العدد المركب L الذي يحقق: $z_A - z_B = L(z_A - z_C)$، اكتب L على الشكل الجبري، ثم الأسي

❸ استنتج طبيعة المثلث ABC

III) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

❶ جد الكتابة المركبة للتشابه S

❷ عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S

❸ بين أن النقط A، B و A' في استقامية

يوم: 07 مارس 2023
المدة: 30 دقيقة
فرض الفصل الثالث
الأستاذ: قويسم الخليل
الشعبة: علوم تجريبية

I) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3 - i\sqrt{3}$

❶ اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي

❷ نعتبر العدد المركب L الذي يحقق: $z_A - z_B = L(z_A - z_C)$، اكتب L على الشكل الجبري، ثم الأسي

❸ استنتج طبيعة المثلث ABC

III) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

❶ جد الكتابة المركبة للتشابه S

❷ عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S

❸ بين أن النقط A، B و A' في استقامية

(I

• التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

$$P(6)=6^3-12(6)^2+48(6)-72=0$$

ومنه 6 جذر لـ $P(z)$

• حل المعادلة $P(z)=0$

لدينا: 6 جذر لـ $P(z)$ ، ومنه:

$$P(z)=(z-6)(az^2+bz+c)$$

حيث: a ، b و c أعداد حقيقة

	1	−12	48	−72
6	0	6	−36	72
	1	−6	12	0

ومنه: $P(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$

إذن:

$$P(z)=0\Longrightarrow\begin{cases}z-6=0\\ \text{أو}\\ z^2-6z+12=0\end{cases}$$

لدينا: $(z-6=0)$ أي $z=6$

ولدينا: $(z^2-6z+12=0)$ ، باستعمال Δ:

لدينا: $\Delta=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ ، ومنه:

$$\begin{cases}z=\dfrac{6+2\sqrt{3}i}{2}=3+\sqrt{3}i\\ \text{أو}\\ z=3-\sqrt{3}i\end{cases}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي:

$$\boxed{s=\{6;(3+\sqrt{3}i);(3-\sqrt{3}i)\}}$$

(II

❶ كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي:

• لدينا: $\boxed{z_A=6e^{i2\pi}}$

• نضع θ_B طويلة لـ z_B لدينا:

$$\begin{cases}|z_B|=2\sqrt{3}\\ \cos\theta_B=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Longrightarrow\theta_B=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن: $\boxed{z_B=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}$

لدينا: $z_C=\overline{z_B}$ ومنه: $\boxed{z_C=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

❷ كتابة L على الشكل الجبري، ثم الشكل الأسي:

$$z_A-z_B=L(z_A-z_C)\Longrightarrow L=\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$$

ومنه:

$$L=\frac{6-3-i\sqrt{3}}{6-3+i\sqrt{3}}=\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\times\frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{9-3-6\sqrt{3}i}{12}=\boxed{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

لدينا:

$$|L|=\left|\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$$

بفرض θ_L عمدة لـ L لدينا:

$$\begin{cases}|L|=1\\ \cos\theta_L=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_L=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Longrightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن: $\boxed{L=e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

❸ استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا:

$$L=e^{-i\frac{\pi}{3}}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{BA}{CA}=1\\ \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA}\right)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع

(III

❶ ايجاد الكتابة المركبة للتشابه S:

$$z'-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_C)$$
$$\Longrightarrow z'-z_C=\sqrt{3}i(z-z_C)$$
$$\Longrightarrow z'=\sqrt{3}iz-\sqrt{3}iz_C+z_C$$
$$\Longrightarrow z'=\sqrt{3}iz-3\sqrt{3}i-3+3-\sqrt{3}i$$
$$\Longrightarrow\boxed{z'=\sqrt{3}iz-4\sqrt{3}i}$$

❷ تعيين $z_{A'}$ لاحقة A' صورة A بالتشابه S:

$$z_{A'}=\sqrt{3}iz_A-4\sqrt{3}i\Longrightarrow z_{A'}=\sqrt{3}i\times6-4\sqrt{3}i$$
$$\Longrightarrow\boxed{z_{A'}=2\sqrt{3}i}$$

❸ تبيين أن النقط A، B و A' في استقامية:

$$\frac{z_A-z_{A'}}{z_A-z_B}=\frac{6-2\sqrt{3}i}{6-3-\sqrt{3}i}=\frac{6-2\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}=\frac{2\left(3-\sqrt{3}i\right)}{3-\sqrt{3}i}$$
$$=2\in\mathbb{R}$$

ومنه: $\overrightarrow{A'A}=2\overrightarrow{BA}$

إذن النقط A، B و A' في استقامية.